



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜLERİ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve DAVARCI YALÇIN

**GENİŞLETİLMİŞ DENEME
DENKLEM METODU İLE
BAZI KİSMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OSMANİYE – 2021

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**GENİŞLETİLMİŞ DENEME DENKLEM METODU İLE
BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI**

Merve DAVARCI YALÇIN

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**OSMANİYE
Kasım 2021**

TEZ ONAYI

GENİŞLETİLMİŞ DENEME DENKLEM METODU İLE BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI

Merve DAVARCI YALÇIN tarafından Doç. Dr. Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY danışmanlığında Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda hazırlanan bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği/çokluğu ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY
Matematik Anabilim Dalı, OKÜ

.....

Üye: Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Matematik Anabilim Dalı, KSÜ

.....

Üye: Doç. Dr. Yusuf GÜREFE
Matematik Anabilim Dalı, MEÜ

.....

Yukarıdaki jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve /..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Bülent YANIKTEPE
Enstitü Müdürü, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

.....

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Merve DAVARCI YALÇIN



ÖZET

GENİŞLETİLMİŞ DENEME DENKLEM METODU İLE BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI

Merve DAVARCI YALÇIN
Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY

Kasım 2021, 44 sayfa

Bu tez çalışması beş ayrı bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölüm olan giriş kısmında kısmi diferansiyel denklemler ve genişletilmiş deneme denklem metodunun ortaya çıkışı ve metodun gelişimi ile ilgili birtakım bilgiler aktarılmıştır. İkinci bölümde bu tez çalışması için gerekli olan bazı temel tanım ve kavramlar yer almaktadır. Üçüncü bölümde ise genişletilmiş deneme denklem metodunun genel yapısı hakkında bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümde (2+1) Boyutlu Lineer Olmayan Elektriksel İletim Hattı, Dullin-Gottwald-Holm Dinamik (DGHD), Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine (BBMP) ve Gergin Dalga denklemlerinin bazı tam çözümlerini elde etmek amacıyla bu denklemler için Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu (GDDM) ele alınmıştır. Ayrıca, Mathematica 12 programı kullanılarak elde edilmiş olan çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri belli değerler için çizilmiştir. Beşinci bölüm sonuç kısmıdır ve bu tezde bulunan çözümlerle ilgili olarak kapsamlı sonuçlar belirtilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Mathematica 12, Hareketli dalga çözümü, Genişletilmiş deneme denklem metodu.

ABSTRACT

FINDING SOLUTIONS OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY EXTENDED TRIAL EQUATION METHOD

Merve DAVARCI YALÇIN
M. Sc., Department of Math
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Şeyma TÖLÜCE DEMİRAY

November 2021, 44 pages

This thesis consists of five distinct chapters. In the introduction part, which is the first chapter, some informations about partial differential equations and the emergence of the extended trial equation method and the development of the method are given. In the second part, some basic definitions and concepts required for this thesis study are included. In the third part, informations about the general structure of the extended trial equation method are introduced. In the fourth section, Extended trial equation method is discussed to find some exact solutions of (2+1)-dimensional nonlinear electrical transmission line, the Dullin-Gottwald-Holm Dynamical (DGHD), Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine (BBMP) and the strain wave equations. Also, two and three dimensional graphics of the obtained solutions with the help of Mathematica 12 program are drawn for certain values. The fifth part is the conclusion part and comprehensive results about the obtained solutions in this thesis are stated.

Keywords: Mathematica 12, Travelling wave solution, Extended trial equation method.

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans tez konumun belirlenerek çalışmamın yürütölmesinde benden bilgi, deneyim ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Şeyma TÖLÖCE DEMİRAY'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI	
TEZ BİLDİRİMİ	
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vii
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.....	3
3.MATERYAL VE METOD.....	6
3.1.Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu (GDDM).....	6
4.METODUN UYGULANMASI.....	8
4.1.(2+1) Boyutlu Lineer Olmayan Elektriksel İletim Hattı Denklemi ve Uygulaması.....	8
4.2.Dullin-Gottwald-Holm Dinamik (DGHD) Denklemi ve Uygulaması	16
4.3.Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine (BBMP) Denklemi ve Uygulaması.....	22
4.4.Gergin Dalga Denklemi ve Uygulaması.....	31
5.SONUÇ.....	40
KAYNAKLAR.....	41
ÖZGEÇMİŞ.....	44

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. (2+1) boyutlu lineer olmayan elektriksel iletim hattı denkleminin GDDM ile elde edilen (4.1.18) çözümüne ait $k=1$, $v_0=2$, $\tau_1=1$, $\xi_2=3$, $\xi_3=3$, $\xi_4=-1$, $\alpha_1=3$, $\alpha_2=2$, $\alpha=2$, $\beta=4$, $y=1$, $-15 \leq x \leq 15$, $-5 \leq t \leq 5$ ve $t=1$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.....11

Şekil 4.2. (2+1) boyutlu lineer olmayan elektriksel iletim hattı denkleminin GDDM ile elde edilen (4.1.19) çözümüne ait $k=4$, $v_0=3$, $\tau_1=2$, $\xi_2=5$, $\xi_3=4$, $\xi_4=-2$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=3$, $\alpha=1$, $\beta=2$, $y=2$, $-25 \leq x \leq 25$, $-4 \leq t \leq 4$ ve $t=2$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.....12

Şekil 4.3. (2+1) boyutlu lineer olmayan elektriksel iletim hattı denkleminin GDDM ile elde edilen (4.1.20) çözümüne ait $k=9$, $v_0=5$, $\tau_1=-2$, $\xi_2=1$, $\xi_3=2$, $\xi_4=-1$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=3$, $\alpha_4=4$, $\alpha=3$, $\beta=6$, $y=3$, $-35 \leq x \leq 35$, $-3 \leq t \leq 3$ ve $t=1$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.....12

Şekil 4.4. Dullin-Gottwald-Holm Dinamik denkleminin GDDM ile elde edilen (4.2.15) çözümüne ait $\tau_0=1$, $\tau_1=2$, $h_1=2$, $h_2=1$, $h_3=-1$, $\xi_0=3$, $\xi_1=-1$, $-25 \leq x \leq 25$, $-5 \leq t \leq 5$ ve $t=3$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.....19

Şekil 4.5. Dullin-Gottwald-Holm Dinamik denkleminin GDDM ile elde edilen (4.2.16) çözümüne ait $\tau_0=1$, $\tau_1=-2$, $h_1=-2$, $h_2=2$, $h_3=1$, $\xi_0=-2$, $\xi_1=-1$, $-35 \leq x \leq 35$, $-10 \leq t \leq 10$ ve $t=2$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.....19

Şekil 4.6. Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.23) çözümüne ait $\tau_0=1$, $\tau_1=3$, $a=1$, $b=2$, $c=-1$, $\xi_0=5$, $\xi_1=-3$, $q=2$, $-45 \leq x \leq 45$, $-1 \leq t \leq 1$ ve $t=0.5$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.....26

Şekil 4.7. Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.24) çözümüne ait $\tau_0 = -3, \tau_1 = 2, a = 5, b = 3, c = 1, \xi_0 = 3, \xi_1 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, q = 2, -20 \leq x \leq 20, -5 \leq t \leq 5$ ve $t = 2.5$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.....26

Şekil 4.8. Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.26) çözümüne ait $\tau_0 = -2, \tau_1 = 2, a = 2, b = -1, c = 3, \xi_0 = 1, \xi_1 = 6, \alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1, q = 2, -35 \leq x \leq 35, -3 \leq t \leq 3$ ve $t = 1.5$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.....27

Şekil 4.9. Gergin dalga denkleminin GDDM ile elde edilen (4.4.21) çözümüne ait $\tau_0 = -1, \tau_1 = 2, \xi_1 = 4, \xi_2 = 1, \alpha_1 = -2, \alpha_3 = -2, \alpha_4 = 1, \gamma = 3, -35 \leq x \leq 35, -5 \leq t \leq 5$ ve $t = 4.5$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.....35

Şekil 4.10. Gergin dalga denkleminin GDDM ile elde edilen (4.4.22) çözümüne ait $\tau_0 = -2, \tau_1 = 5, \xi_1 = 3, \xi_2 = 1, \alpha_1 = -3, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1, \alpha_4 = 2, \gamma = 4, -30 \leq x \leq 30, -3 \leq t \leq 3$ ve $t = 2$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.....35

Şekil 4.11. Gergin dalga denkleminin GDDM ile elde edilen (4.4.24) çözümüne ait $\tau_0 = -1, \tau_1 = 1, \xi_1 = 2, \xi_2 = 4, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 5, \alpha_3 = -3, \alpha_4 = 3, \gamma = 2, -45 \leq x \leq 45, -1 \leq t \leq 1$ ve $t = 0.5$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.....36

SİMGELER VE KISALTMALAR

BBMP → Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine

DGHD → Dullin-Gottwald-Holm Dinamik

GDDM → Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu



1.GİRİŞ

Matematikte, diferansiyel denklem bir ya da birden fazla fonksiyonu ve bu fonksiyonların türevi arasındaki bağıntıyı açıklayan denklemdir. Diferansiyel denklemler Isaac Newton ve Gottfried Leibniz'in Kalkülüs'ü ortaya atmasıyla başlar. Günümüzde gerçek hayat ile ilişkili sayısız problem için çözüm üreten diferansiyel denklemler, birinci mertebeden diferansiyel denklemleri tanımlamak üzere $dy/dx = f(x, y)$ gösteriminin Newton tarafından 1690 yılında kullanılması ile başlamıştır. Diferansiyel denklemlerin ilk ortaya çıktığı dönemde homojen ve değişkenlerine ayrılabilen adi diferansiyel denklemler üzerinde çalışılmış; 18. yüzyılda matematiğin fizikteki uygulama alanlarının gelişmesiyle birlikte lineer olmayan, birden çok çözümü olan kısmi diferansiyel denklem türleri için de hesap yöntemleri geliştirilmiştir.

Fizik, kimya, mühendislik, biyoloji ve ekonomi alanlarında matematiksel modeller genellikle diferansiyel denklemler kullanılarak ifade edilirler. Bu denklemlerde, fonksiyonlar genellikle fiziksel ya da finansal değerlere, fonksiyon türevleriye değerlerin değişim hızlarına denk gelir [1].

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için, Hirota'nın doğrudan metodu [2], Jakobi eliptik fonksiyon metodu [3], deneme denklem metodunun yeni versiyonu [4], (G'/G) – açılım metodu [5], tanh-coth metodu [6] gibi pek çok metod literatüre kazandırılmıştır.

İlk olarak Deneme Denklem Metodu'nu C. S. Liu 2005 yılında sunmuştur [7]. Liu'nun bu teknikteki düşüncesi bir diferansiyel denklemin tam çözümünün integrasyon alma işlemi ile bulunabilmesidir. Lineer olmayan geliştirilmiş Boussinesq Denklemi ve Getmanou Denklemi'nin çözümlerini bulmak için deneme denklem metodu Yang Li tarafından ele alınmıştır [8-9]. Deneme denklem metodunun modifiye edilmiş hali birçok yazar tarafından incelenmiştir [10-13]. Sonrasında bu teknik yenilenerek Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu adıyla Liu tarafından literatüre sunulmuştur [14]. Y. Pandır ve diğerleri GDDM'yi bazı denklemlere uygulamıştır [15].

Y. Güreffe ve diğerleri lineer olmayan diferansiyel denklemler için GDDM'yi kullanarak, eliptik integral işlev, F çözümleri ve Jakobi eliptik işlev çözümlerinin hareketli dalga çözümlerini bulmuşlardır [16]. M. Postolache ve diğerleri lineer olmayan problemlerin, M. Ekici ve diğerleri lineer olmayan Schrödinger-Hirota Denkleminin, Y. Güreffe ve diğerleri bir boyutlu geliştirilmiş genel KdV denklemi ve $R(m,n)$ denkleminin, Y. Pandır ve diğerleri geliştirilmiş 3. mertebeden kesirli KdV denklemi ve kesirli $K(n,n)$ denkleminin bazı tam çözümlerini bulmak için GDDM'yi ele almıştır [17-20]. H. Bulut ve diğerleri İkili Güç ile lineer olmayan Schrödinger denkleminin, Hirota denklemi, Hirota-Maccari, Maccari Sistemi, Sasa-Satsuma denklemini, S. Tuluçe Demiray ve H. Bulut, Genelleştirilmiş Zakharov Sistemi, Yeni Hamilton Genlik Denklemi ve Fokas Lenells Denklemi, Genelleştirilmiş Gardner Denklemi, İyon Sesi ve Langmuir Dalgaları için denklem sisteminin bazı tam çözümlerini elde etmek için GDDM'yi ele almıştır [21-28].

Bu çalışmada ise, (2+1) Boyutlu Lineer Olmayan Elektriksel İletim Hattı Denklemi, Dullin-Gottwald-Holm Dinamik Denklemi, Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine Denklemi ve Gergin Dalga Denkleminin çözümlerini elde etmek için GDDM ele alınmıştır. Bu denklemlerin GDDM kullanılarak bulunan bazı çözümleri için Mathematica 12 yardımıyla iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir.

2.TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım

Bilinmeyen bir fonksiyon ve bu fonksiyona ait olan türevlerden oluşan denklemlere diferansiyel denklem adı verilir. Kısaca diferansiyel denklem, bir veya birden fazla bağımlı değişkeni içerisinde barındıran bir fonksiyon ile bu fonksiyona ait bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında tanımlanmış bağıntıdır [29].

Tanım

Bir diferansiyel denklem içerisindeki bağımsız değişken, belirli bir değişkene göre denklemde türev alınması durumunda göz önüne alınan değişken olarak, bağımlı değişken ise denklem içerisinde türevi alınan değişken olarak tanımlanır [29].

$x \rightarrow$ Bağımsız değişken

$y \rightarrow$ Fonksiyon (bağımlı değişken)

Tanım

Bir bağımsız ve bir bağımlı değişkenden oluşan ve bağımlı olan değişkenin bağımsız olan değişkene göre çeşitli mertebeden adi türevlerinden oluşan denklemlere adi diferansiyel denklemler denilmektedir. Bir adi diferansiyel denklem genel olarak,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilebilir [29].

Tanım

Bir diferansiyel denklem, en az bir bağımlı değişken ve en az iki bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli mertebelerden kısmi türevlerini bulunduruyorsa bu tür denklemlere kısmi türevli diferansiyel denklem adı verilir. n. mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem,

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0, \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir [29].

Tanım

Bir kısmi türevli denklem içerisinde yer alan en yüksek basamaklı kısmi türevin basamağına bu denklemin mertebesi denilmektedir [29].

Tanım

Bir kısmi türevli denklem içerisinde yer alan en yüksek basamaklı kısmi türevin kuvvetine bu denklemin derecesi denilmektedir [29].

Tanım

Diferansiyel denklemler genel olarak lineer olan diferansiyel denklemler ve lineer olmayan diferansiyel denklemler olmak üzere ikiye ayrılır. Bir diferansiyel denklem içerisinde bulunan bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin türevlerinin katsayıları bağımsız değişken içeriyorsa bu tür diferansiyel denklemlere değişken katsayılı diferansiyel denklemler denir. Bir kısmi türevli denklemde bulunan bağımlı değişken ve bu değişkenlerin içerisindeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklem, bağımlı değişkenler ile onların türevleri parantezi içerisinde yazıldığı zaman katsayıları sabit veya yalnızca bağımsız olan değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu tür denklemlere lineer diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem içerisinde bulunan bağımlı değişken kendisi ya da türevleri ile çarpım veya bölüm şeklinde yazılıyor ya da bağımlı olan değişken üstel, logaritmik ya da trigonometrik olarak bulunuyor veya bağımlı olan değişkenlerin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyükse bu türde olan denklemler lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir [29].

Tanım

Herhangi bir lineer olmayan adi diferansiyel denklem içerisindeki en yüksek mertebeden türev içeren terim $u^{(p)}$ ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim $(u^r u^{(q)})^s$ şeklinde verilsin. Bu durumda dengeleme terimi,

$$n = l - \frac{p + (r - q + 1)s - 1}{p - qs}, \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir [29].

Kavram

Bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına sebep olan titreşime dalga denir. Ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketlerinin dalgaları ve suda ilerleyen yüzey dalgaları en bilinen dalgalardır. Dalgalar, durağan ve hareketli (travelling) dalgalar olarak sınıflara ayrılır. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu çeşit dalgalar, dalganın bulunduğu ortam dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbiri ile ters yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda ortaya çıkarlar. Hareketli dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşımaksızın enerjinin yayılması ile ortaya çıkan dalgalardır [30]. Yaşantımızdaki her fiziksel olay için birçok bilgi vermesi ile birlikte hayatımızın her noktasında kolaylık sağlayan dalgalar (solitary dalga) kavramı ile açıklanır [31].

Kavram

Mathematica, Wolfram Research tarafından üretilmiş olan, tanınmış bir simgesel matematik yazılımıdır. Matematiksel her türlü hesaplamalar yapan genel bir sistem olan Mathematica sayısal işlemler yapan bir hesap makinesi gibi de algılanabilir. Bunun yanında sembolik hesaplamalar ve grafik nesneler ile de çalışır [32-33].

3.MATERYAL VE METOD

3.1. Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu (GDDM) :

Genişletilmiş deneme denklem metodu aşağıdaki gibi dört adımda açıklanır [15].

Adım 1:

u fonksiyonu x ve t gibi iki bağımsız değişkene bağlı olan bir fonksiyon olmak üzere,

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (3.1.1)$$

şeklindeki kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (3.1.1) için dalga dönüşüm denklemi,

$$u(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = u(\eta), \quad \eta = k \left(\sum_{j=1}^N x_j - \lambda t \right), \quad (3.1.2)$$

şeklinde olup burada k, λ sabit ve $k \neq 0, \lambda \neq 0$ 'dır. (3.1.1) denklemine (3.1.2) dönüşümü uygulanırsa (3.1.1) kısmi diferansiyel denklemi,

$$N(u, u', u'', \dots) = 0, \quad (3.1.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemine dönüşür.

Adım 2:

(3.1.3) diferansiyel denklemi için deneme denklem fonksiyonu

$$u = \sum_{i=0}^{\delta} \tau_i \Gamma^i, \quad (3.1.4)$$

olmak üzere,

$$(\Gamma')^2 = \Lambda(\Gamma) = \frac{\phi(\Gamma)}{\psi(\Gamma)} = \frac{\xi_g \Gamma^g + \dots + \xi_1 \Gamma + \xi_0}{\zeta_e \Gamma^e + \dots + \zeta_1 \Gamma + \zeta_0}, \quad (3.1.5)$$

şeklindedir. (3.1.4) ve (3.1.5) denklemlerinden

$$(u')^2 = \frac{\phi(\Gamma)}{\psi(\Gamma)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i \tau_i \Gamma^{i-1} \right)^2, \quad (3.1.6)$$

$$u'' = \frac{\phi'(\Gamma)\psi(\Gamma) - \phi(\Gamma)\psi'(\Gamma)}{2\psi^2(\Gamma)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i \tau_i \Gamma^{i-1} \right) + \frac{\phi(\Gamma)}{\psi(\Gamma)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i(i-1) \tau_i \Gamma^{i-2} \right), \quad (3.1.7)$$

denklemleri elde edilir. Burada $\phi(\Gamma)$ ve $\psi(\Gamma)$ polinomdur. (3.1.5), (3.1.6) ve (3.1.7) denklemleri (3.1.3) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\Omega(\Gamma) = \sigma_s \Gamma^s + \dots + \sigma_1 \Gamma + \sigma_0 = 0, \quad (3.1.8)$$

şeklinde Γ 'ya bağlı olan $\Omega(\Gamma)$ polinomu bulunur. Daha sonra dengeleme prensibi gereğince $\mathcal{G}$, $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{S}$ arasındaki matematiksel bağıntı elde edilir ve böylece $\mathcal{G}$, $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{S}$ 'nin bazı değerleri de buna göre hesaplanabilir.

Adım 3: (3.1.8) denklemindeki $\Omega(\Gamma)$ ifadesinin tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek;

$$\sigma_i = 0, \quad i = 0, \dots, s, \quad (3.1.9)$$

şeklindeki cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle $\xi_0, \dots, \xi_g$, $\zeta_0, \dots, \zeta_{\varepsilon}$ ve $\tau_0, \dots, \tau_{\delta}$ katsayılarının değerleri bulunur.

Adım 4: (3.1.5) denklemini integre edilerek,

$$\pm(\eta - \eta_0) = \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Lambda(\Gamma)}} = \int \sqrt{\frac{\psi(\Gamma)}{\phi(\Gamma)}} d\Gamma, \quad (3.1.10)$$

şeklinde temel integral formu elde edilir. Burada $\Omega(\Gamma)$ 'nın köklerini sağlayan polinomlar için ayırma sistemi ele alınır ve Mathematica 12 programı yardımıyla (3.1.10) denklemindeki integraller hesaplanabilir. Burada bulunan eşitlikler (3.1.3) diferansiyel denkleminin tam çözümleridir. Böylece (3.1.1) diferansiyel denkleminin tam salınımlı dalga çözümleri elde edilir.

4.METODUN UYGULANMASI:

Bu bölümde, (2+1) Boyutlu Lineer Olmayan Elektriksel İletim Hattı Denklemi, Dullin-Gottwald-Holm Dinamik (DGHD) Denklemi, Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine (BBMP) Denklemi ve Gergin Dalga Denkleminin çözümlerini bulmak için GDDM ele alınmıştır.

4.1. (2+1) Boyutlu Lineer Olmayan Elektriksel İletim Hattı Denklemi ve Uygulaması

(2+1) Boyutlu Lineer Olmayan Elektriksel İletim Hattı Denklemi,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(U - \alpha U^2 + \beta U^3) - u_0^2(\delta_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\delta_1^4 \partial^4 U}{12 \partial x^4}) - \omega_0^2(\delta_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\delta_2^4 \partial^4 U}{12 \partial y^4}) = 0, \quad (4.1.1)$$

şeklinde verilsin. Burada α, β, u_0 ve ω_0 keyfi sabitlerdir. δ_1 ve δ_2 sırasıyla uzunlamasına ve enine yönde iki bitişik bölüm arasındaki boşluktur. (4.1.1) lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümleri için GDDM'yi kullanalım. (4.1.1) denklemi için;

$$U(x, y, t) = U(\eta), \quad \eta = \sqrt{k}(x + y - v_0 t), \quad (4.1.2)$$

dönüşümü ele alınırsa (4.1.1) denklemi,

$$\left[m - (u_0^2 K_1 + \omega_0^2 K_2) \right] U + m(\beta U^3 - \alpha U^2) - \frac{1}{12} (u_0^2 K_1^2 + \omega_0^2 K_2^2) \frac{d^2 U}{d\eta^2} = 0, \quad (4.1.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemine dönüşür. Burada $m = kv_0^2$, $K_1 = \delta_1^2 k$, $K_2 = \delta_2^2 k$ şeklindedir. (3.1.4) ve (3.1.7) eşitlikleri (4.1.3) adi diferansiyel denkleminde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa

$$\mathcal{G} = 2\delta + \varepsilon + 2, \quad (4.1.4)$$

şeklinde dengeleme bağıntısı elde edilir.

Durum 1:

(4.1.4) denkleminde eğer $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$ ve $\mathcal{G} = 4$ ise,

$$(u')^2 = \frac{\tau_1^2 (\xi_0 + \Gamma \xi_1 + \Gamma^2 \xi_2 + \Gamma^3 \xi_3 + \Gamma^4 \xi_4)}{\zeta_0}, \quad (4.1.5)$$

$$u'' = \frac{\tau_1 (\xi_1 + 2\Gamma \xi_2 + 3\Gamma^2 \xi_3 + 4\Gamma^3 \xi_4)}{2\zeta_0}, \quad (4.1.6)$$

denklemleri elde edilir. Burada $\xi_4 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$ 'dır. (3.1.4), (4.1.5), (4.1.6) eşitlikleri (4.1.3) denkleminde yerine yazılırsa cebirsel denklem sisteminin ortaya çıktığı görülür. Cebirsel denklem sisteminde bulunan ξ_0 , ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , ξ_4 , ζ_0 ve v_0 katsayıları da Mathematica 12 programı kullanılarak,

$$\xi_0 = \xi_0, \xi_1 = \frac{(4\alpha\xi_4 + 3\beta\xi_3\tau_1)(8\alpha^2\xi_4^2 - 6\alpha\beta\xi_3\xi_4\tau_1 - 9\beta^2(\xi_3^2 - 4\xi_2\xi_4)\tau_1^2)}{216\beta^3\xi_4^2\tau_1^3},$$

$$\xi_2 = \xi_2, \xi_3 = \xi_3, \xi_4 = \xi_4, \zeta_0 = \frac{1}{288} \left(-24\xi_2 + \frac{9\xi_3^2}{\xi_4} - \frac{16(\alpha^2 - 3\beta)\xi_4}{\beta^2\tau_1^2} \right), \quad (4.1.7)$$

$$\tau_0 = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\xi_3\tau_1}{4\xi_4}, \tau_1 = \tau_1, v_0 = -\frac{4\sqrt{3\beta n\xi_4}}{\sqrt{-16(\alpha^2 - 3\beta)k\xi_4^2 + 3\beta^2k(3\xi_3^2 - 8\xi_2\xi_4)\tau_1^2}},$$

şeklinde bulunur.

(4.1.7) katsayıları (3.1.10) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\pm(\eta - \eta_0) = A \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_4} + \frac{\xi_1}{\xi_4}\Gamma + \frac{\xi_2}{\xi_4}\Gamma^2 + \frac{\xi_3}{\xi_4}\Gamma^3 + \Gamma^4}}, \quad (4.1.8)$$

elde edilir.

$$\text{Burada } A = \sqrt{\frac{\zeta_0}{\xi_4}} = \sqrt{\frac{1}{288} \left(\frac{-24\xi_2}{\xi_4} + \frac{9\xi_3^2}{\xi_4^2} - \frac{16\alpha^2 - 48\beta}{\beta^2\tau_1^2} \right)} \text{ şeklindedir.}$$

(4.1.8) denklemini integre edilirse (4.1.1) denkleminin çözümleri,

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{A}{\Gamma - \alpha_1}, \quad (4.1.9)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\alpha_1 - \alpha_2} \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_2}{\Gamma - \alpha_1}}, \quad \alpha_2 > \alpha_1, \quad (4.1.10)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{A}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \left| \frac{\Gamma - \alpha_1}{\Gamma - \alpha_2} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad (4.1.11)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} - \sqrt{(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}}{\sqrt{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \sqrt{(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3, \quad (4.1.12)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}} F(\varphi, l), \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4, \quad (4.1.13)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$F(\varphi, l) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \psi}}, \quad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(\Gamma - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_4)}}, \quad l^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}, \quad (4.1.14)$$

şeklindedir. Ayrıca $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4

$$\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_4} \Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4} = 0, \quad (4.1.15)$$

denkleminin kökleridir. Daha sonra (4.1.9)-(4.1.13) denklemleri (3.1.4) denkleminde yerine yazılırsa (4.1.2) denklemi yardımıyla (4.1.1) denkleminin rasyonel fonksiyon çözümleri,

$$u_1(x, y, t) = \pm \frac{A_1}{\sqrt{k}(x + y - v_0 t)}, \quad (4.1.16)$$

$$u_2(x, y, t) = \frac{4A^2(\alpha_2 - \alpha_1)\tau_1}{4A^2 - \left[(\alpha_1 - \alpha_2)(\sqrt{k}(x + y - v_0 t)) \right]^2}, \quad (4.1.17)$$

hareketli dalga çözümü,

$$u_3(x, y, t) = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\tau_1}{2} \left\{ 1 \pm \coth \left[\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{A} (\sqrt{k}(x + y - v_0 t)) \right] \right\}, \quad (4.1.18)$$

soliton çözümü,

$$u_4(x, y, t) = \frac{A_2}{D + \cosh \left[B(\sqrt{k}(x + y - v_0 t)) \right]}, \quad (4.1.19)$$

ve Jakobi eliptik fonksiyon çözümü,

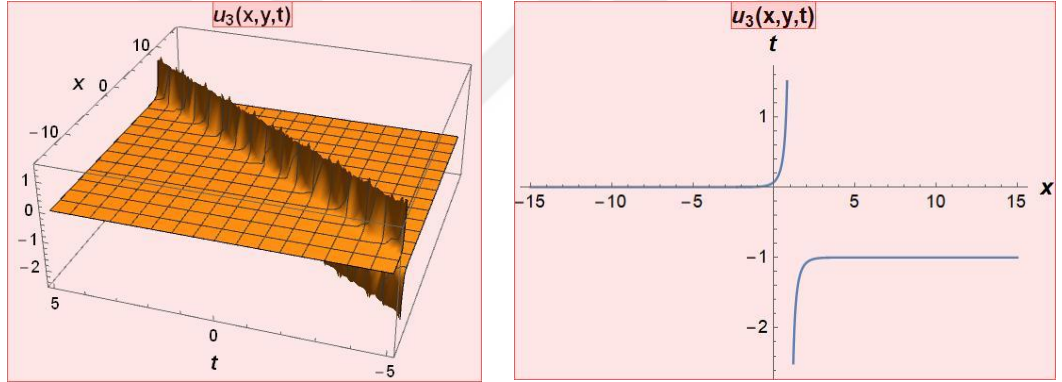
$$u_5(x, y, t) = \frac{A_3}{(M + N \operatorname{sn}^2(\varphi, l))}, \quad (4.1.20)$$

şeklindedir. Burada,

$$A_1 = \tau_1 A, \quad A_2 = \frac{2\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{\alpha_3 - \alpha_2}, \quad B = \frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{A}, \quad D = \frac{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2},$$

$$A_3 = (2\tau_1(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)), \quad M = \alpha_4 - \alpha_2, \quad N = \alpha_1 - \alpha_4, \quad l^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)},$$

$$\varphi = \frac{\pm \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2A} (\sqrt{k}(x + y - v_0 t)) \text{ şeklindedir.}$$

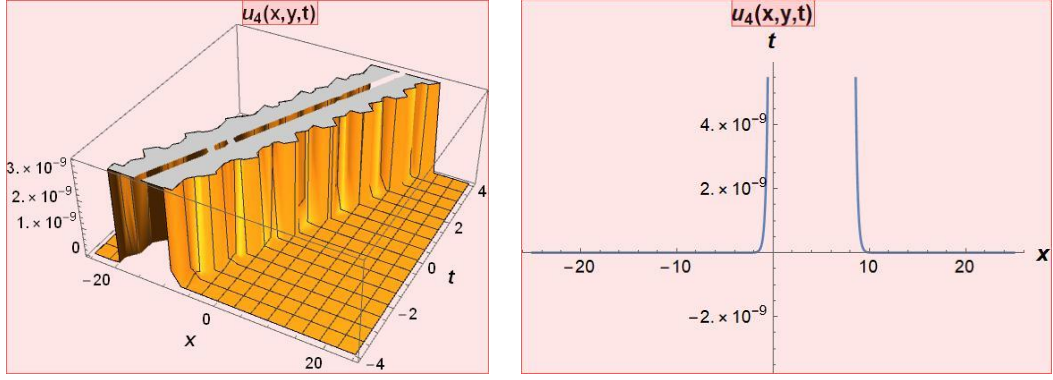


Şekil 4.1. (2+1) Boyutlu Lineer Olmayan Elektriksel İletim Hattı Denklemine GDDM ile elde edilen

(4.1.18) çözümüne ait $k = 1$, $v_0 = 2$, $\tau_1 = 1$, $\xi_2 = 3$, $\xi_3 = 3$, $\xi_4 = -1$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$,

$\alpha = 2$, $\beta = 4$, $y = 1$, $-15 \leq x \leq 15$, $-5 \leq t \leq 5$ ve $t = 1$ değerleri için

sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.

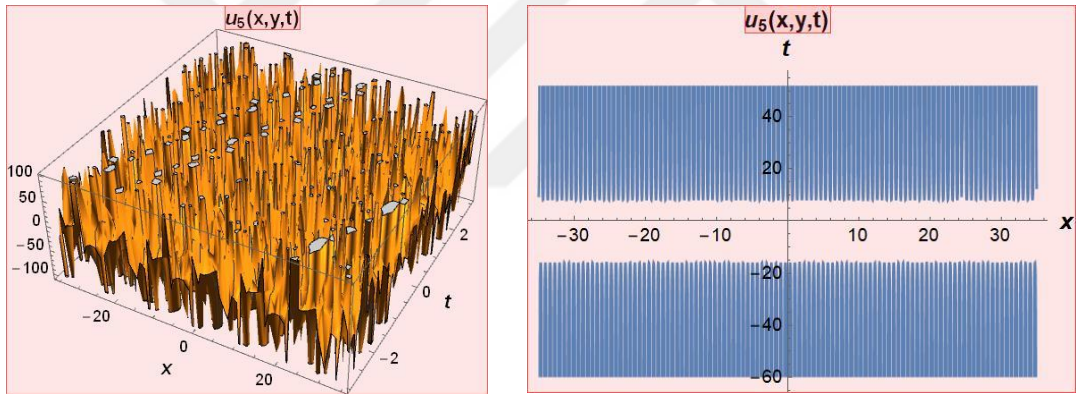


Şekil 4.2. (2+1) Boyutlu Lineer Olmayan Elektriksel İletim Hattı Denkleminin GDDM ile elde edilen

(4.1.19) çözümüne ait $k = 4$, $v_0 = 3$, $\tau_1 = 2$, $\xi_2 = 5$, $\xi_3 = 4$, $\xi_4 = -2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$,

$\alpha_3 = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $y = 2$, $-25 \leq x \leq 25$, $-4 \leq t \leq 4$ ve $t = 2$ değerleri için

sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.



Şekil 4.3. (2+1) Boyutlu Lineer Olmayan Elektriksel İletim Hattı Denkleminin GDDM ile elde edilen

(4.1.20) çözümüne ait $k = 9$, $v_0 = 5$, $\tau_1 = -2$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 2$, $\xi_4 = -1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$,

$\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = 4$, $\alpha = 3$, $\beta = 6$, $y = 3$, $-35 \leq x \leq 35$, $-3 \leq t \leq 3$ ve $t = 1$

değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.

Açıklama 1: Eğer $l \rightarrow 1$ ise, (4.1.2) denklemi yardımıyla (4.1.20) denklemi,

$$u_6(x, y, t) = \frac{A_3}{M + N \tanh^2 \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2A} (\sqrt{k}(x + y - v_0 t)) \right]}, \quad (4.1.21)$$

hiperbolik fonksiyon çözümüne indirgenir. Burada $\alpha_3 = \alpha_4$ şeklindedir.

Açıklama 2: Eğer $l \rightarrow 0$ ise, (4.1.2) denklemi yardımıyla (4.1.20) denklemi,

$$u_7(x, y, t) = \frac{A_3}{M + N \sin^2 \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2A} (\sqrt{k}(x + y - v_0 t)) \right]}, \quad (4.1.22)$$

periyodik dalga çözümüne indirgenir. Burada $\alpha_2 = \alpha_3$ şeklindedir.

Durum 2:

(4.1.4) denkleminde eğer $\varepsilon = 1$, $\delta = 1$ ve $\vartheta = 5$ ise,

$$(u')^2 = \frac{\tau_1^2 (\Gamma^5 \xi_5 + \Gamma^4 \xi_4 + \Gamma^3 \xi_3 + \Gamma^2 \xi_2 + \Gamma \xi_1 + \xi_0)}{\zeta_0 + \zeta_1 \Gamma}, \quad (4.1.23)$$

$$u'' = \frac{\tau_1 [(\zeta_0 + \zeta_1 \Gamma)(5\xi_5 \Gamma^4 + 4\xi_4 \Gamma^3 + 3\xi_3 \Gamma^2 + 2\xi_2 \Gamma + \xi_1)] - \zeta_1 (\xi_5 \Gamma^5 + \xi_4 \Gamma^4 + \xi_3 \Gamma^3 + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_1 \Gamma + \xi_0)}{2(\zeta_0 + \zeta_1 \Gamma)^2}, \quad (4.1.24)$$

elde edilir. Burada $\xi_5 \neq 0$, $\zeta_1 \neq 0$ 'dır. (3.1.4), (4.1.23), (4.1.24) eşitlikleri (4.1.3) denkleminde yerine yazılırsa cebirsel denklem sisteminin ortaya çıktığı görülür. Cebirsel denklem sisteminde bulunan $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \zeta_0, \zeta_1$ ve v_0 katsayıları da Mathematica 12 programı kullanılarak,

$$\begin{aligned} \xi_0 = \xi_0, \xi_1 &= \frac{-72\beta\zeta_0^3\tau_0\tau_1^2 - 4\zeta_1^2\xi_0p\tau_1^2 + 3\beta\zeta_0\zeta_1\xi_0\tau_1^3 + 12\zeta_0^2\tau_0(\xi_4r + 8\zeta_1p\tau_1)}{\zeta_0\tau_1^2(-4\zeta_1p + 3\beta\zeta_0\tau_1)}, \\ \xi_2 &= \frac{6(16\zeta_1^2\tau_0p\tau_1 + \zeta_0\tau_1(\xi_4s - 6\beta\zeta_0\tau_1^2) + 2\zeta_1(\xi_4\tau_0r + 2\zeta_0(2\alpha - 9\beta\tau_0)\tau_1^2))}{\tau_1^2(-4\zeta_1p + 3\beta\zeta_0\tau_1)}, \\ \xi_3 &= \frac{6\zeta_1\xi_4s + 4(12\zeta_1^2 - \zeta_0\xi_4)p\tau_1 - 36\beta\zeta_0\zeta_1\tau_1^2}{\tau_1(-4\zeta_1p + 3\beta\zeta_0\tau_1)}, \xi_4 = \xi_4, \\ \xi_5 &= \frac{3\beta\zeta_1\xi_4\tau_1}{-4\zeta_1p + 3\beta\zeta_0\tau_1}, v_0 = -\frac{\sqrt{(u_0^2K_1 + \omega_0^2K_2)}\xi_4}{\sqrt{2(k\tau_1(-4\zeta_1p + 3\beta\zeta_0\tau_1))}}, \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

şeklinde bulunur. Burada $p = \alpha - 3\beta\tau_0$, $r = 1 - \alpha\tau_0 + \beta\tau_0^2$, $s = 1 - 2\alpha\tau_0 + 3\beta\tau_0^2$ ’dir.

(4.1.25) denklemi (3.1.5) ve (3.1.10) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = \sqrt{\frac{\zeta_1(4\tau_0 + 2) + \zeta_0\tau_1}{\zeta_4\tau_1}} \int \sqrt{\frac{\Gamma + \frac{\zeta_0}{\zeta_1}}{\Gamma^5 + \frac{\zeta_4}{\zeta_5}\Gamma^4 + \frac{\zeta_3}{\zeta_5}\Gamma^3 + \frac{\zeta_2}{\zeta_5}\Gamma^2 + \frac{\zeta_1}{\zeta_5}\Gamma + \frac{\zeta_0}{\zeta_5}}} d\Gamma, \quad (4.1.26)$$

elde edilir. (4.1.26) denkleminin integrali alınarak (4.1.3) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi(\Gamma) = (\Gamma - \alpha_1)^5 \text{ ise,}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{2A_4}{3\sqrt{\zeta_1}(\zeta_0 + \zeta_1\alpha_1)} \left(\frac{\zeta_0 + \zeta_1\Gamma}{\Gamma - \alpha_1} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.1.27)$$

elde edilir.

$$\phi(\Gamma) = (\Gamma - \alpha_1)^4 (\Gamma - \alpha_2) \text{ ve } \alpha_1 > \alpha_2 \text{ ise,}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{A_4}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\frac{(\zeta_0 + \zeta_1\alpha_2)}{2\sqrt{\zeta_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\zeta_0 + \zeta_1\alpha_1)}} \ln |K(\Gamma)| + \frac{1}{\Gamma - \alpha_1} \sqrt{\frac{(\zeta_0 + \zeta_1\Gamma)(\Gamma - \alpha_2)}{\zeta_1}} \right], \quad (4.1.28)$$

elde edilir. Burada

$$K(\Gamma) = \frac{\Gamma - \alpha_1}{(\zeta_0 + 2\zeta_1\alpha_1 - \zeta_1\alpha_2)\Gamma + \zeta_0(\alpha_1 - 2\alpha_2) - \zeta_1\alpha_2\alpha_1 + 2\sqrt{(\zeta_0 + \zeta_1\Gamma)(\zeta_0 + \zeta_1\alpha_1)(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2)}}, \quad (4.1.29)$$

şeklindedir.

$$\phi(\Gamma) = (\Gamma - \alpha_1)^3 (\Gamma - \alpha_2)^2 \text{ ve } \alpha_1 > \alpha_2 \text{ ise,}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{2A_4}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\sqrt{\frac{(\zeta_0 + \zeta_1\Gamma)}{\zeta_1(\Gamma - \alpha_1)}} + \sqrt{\frac{(\zeta_0 + \zeta_1\alpha_2)}{\zeta_1(\alpha_1 - \alpha_2)}} \arctan \left(\sqrt{\frac{(\Gamma - \alpha_1)(\zeta_0 + \zeta_1\alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\zeta_0 + \zeta_1\Gamma)}} \right) \right], \quad (4.1.30)$$

elde edilir.

$$\phi(\Gamma) = (\Gamma - \alpha_1)^2 (\Gamma - \alpha_2)^2 (\Gamma - \alpha_3) \text{ ve } \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \text{ ise,}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{-A_4}{(\alpha_1 - \alpha_3)\sqrt{\zeta_1}} \left[Y \ln |P(\Gamma)| + Z \ln |R(\Gamma)| \right], \quad (4.1.31)$$

elde edilir. Burada

$$Y = \sqrt{\frac{\zeta_0 + \zeta_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_3}}, P(\Gamma) = \frac{\alpha_2 - \Gamma}{2\sqrt{(\zeta_0 + \zeta_1 \Gamma)(\zeta_0 + \zeta_1 \alpha_2)(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3) + \zeta_0(\alpha_2 - 2\alpha_3) - \zeta_1 \alpha_2 \alpha_3 + (\zeta_0 + 2\zeta_1 \alpha_2 - \zeta_1 \alpha_3)\Gamma}}, \quad (4.1.32)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\zeta_0 + \zeta_1 \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_3}}, R(\Gamma) = \frac{2\sqrt{(\zeta_0 + \zeta_1 \Gamma)(\zeta_0 + \zeta_1 \alpha_1)(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_3) + \zeta_0(\alpha_1 - 2\alpha_3) - \zeta_1 \alpha_1 \alpha_3 + (\zeta_0 + 2\zeta_1 \alpha_1 - \zeta_1 \alpha_3)\Gamma}}{\Gamma - \alpha_2}, \quad (4.1.33)$$

şeklindedir.

$$\phi(\Gamma) = (\Gamma - \alpha_1)^3 (\Gamma - \alpha_2)(\Gamma - \alpha_3) \text{ ve } \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \text{ ise,}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{2A_4}{\alpha_1 - \alpha_3} \sqrt{\frac{\zeta_0 + \zeta_1 \alpha_3}{\zeta_1(\alpha_1 - \alpha_2)}} E(\varphi, l), \quad (4.1.34)$$

elde edilir. Burada

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_1)}{(\Gamma - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}}, l^2 = \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)(\zeta_0 + \zeta_1 \alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\zeta_0 + \zeta_1 \alpha_3)}, \quad (4.1.35)$$

şeklindedir.

$$\phi(\Gamma) = (\Gamma - \alpha_1)^2 (\Gamma - \alpha_2)(\Gamma - \alpha_3)(\Gamma - \alpha_4) \text{ ve } \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \text{ ise,}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{2A_4(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_2)\sqrt{\zeta_1(\alpha_2 - \alpha_3)(\zeta_0 + \zeta_1 \alpha_4)}} \left(\frac{\zeta_0 + \zeta_1 \Gamma}{\alpha_1 - \alpha_4} \pi(\varphi, n, l) - \frac{\zeta_0 + \zeta_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_4} F(\varphi, l) \right), \quad (4.1.36)$$

elde edilir. Burada

$$A_4 = \sqrt{\frac{\zeta_1(4\tau_0 + 2) + \zeta_0\tau_1}{\zeta_4\tau_1}}, \quad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(\Gamma - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_2)}{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)}}, \quad (4.1.37)$$

$$l^2 = \frac{(\alpha_4 - \alpha_3)(\zeta_0 + \zeta_1\alpha_2)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\zeta_0 + \zeta_1\alpha_4)}, \quad n = -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)},$$

şeklindedir.

4.2. Dullin-Gottwald-Holm Dinamik Denklemi ve Uygulaması

Dullin-Gottwald-Holm Dinamik Denklemi,

$$u_t + h_1 u_x - h_2^2 (u_{xxt} + uu_{xxx} + 2u_x u_{xx}) + 3uu_x + h_3 u_{xxx} = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.2.1)$$

şeklinde verilsin. Burada yukarıdaki sistemin akışkan hızı, x uzaysal yönündeki u ile temsil edilir. h_2^2 ($h_2 > 0$) ve $\frac{h_1}{h_3}$ uzunluk ölçülerinin karelerini temsil eder ve $h_1 = \sqrt{gh}$ uzaysal sonsuzlukta durgun haldeki, bozulmamış su için doğrusal dalga hızını gösterir. (Burada $h_1 = 2\omega$ ’dır.) (4.2.1) lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümleri için GDDM’yi kullanalım. (4.2.1) denklemi için;

$$u(x, t) = U(\eta), \quad \eta = x - vt, \quad v \neq 0, \quad (4.2.2)$$

dönüşümü ele alınırsa (4.2.1) denklemi,

$$vh_2^2 (U'')' - vU' + h_1 U' - h_2^2 U (U'')' + h_3 (U'')' + 3UU' - 2h_2^2 U' U'' = 0, \quad (4.2.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemine dönüşür. (4.2.3) denkleminin integrasyon sabiti sıfıra eşit alınır ve denklem bir kez integre edilirse,

$$U''(h_2^2(-v) - h_3 + h_2^2 U) - (h_1 - v)U - \frac{3U^2}{2} + \frac{1}{2}h_2^2 (U')^2 = 0, \quad (4.2.4)$$

denklemi elde edilir. (3.1.4), (3.1.6) ve (3.1.7) eşitlikleri (4.2.4) adi diferansiyel denkleminde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa

$$\mathcal{G} = \varepsilon + 2, \quad (4.2.5)$$

şeklinde dengeleme bağıntısı elde edilir.

Durum 1: (4.2.5) denkleminde eğer $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$ ve $\mathcal{G} = 2$ ise,

$$(u')^2 = \frac{\tau_1^2 (\xi_0 + \Gamma \xi_1 + \Gamma^2 \xi_2)}{\zeta_0}, \quad (4.2.6)$$

$$u'' = \frac{\tau_1 (\xi_1 + 2\Gamma \xi_2)}{2\zeta_0}, \quad (4.2.7)$$

elde edilir. Burada $\xi_2 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$ 'dır. (3.1.4), (4.2.6), (4.2.7) eşitlikleri (4.2.4) denkleminde yerine yazılırsa cebirsel denklem sisteminin ortaya çıktığı görülür. Cebirsel denklem sisteminde bulunan ξ_0 , ξ_1 , ξ_2 , ζ_0 ve v katsayıları da Mathematica 12 programı kullanılarak,

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi_0, \xi_1 = \xi_1, \xi_2 = \frac{h_2^2 \xi_1 \tau_1}{h_3 + h_2^2 (h_1 + 2\tau_0)}, \\ \tau_0 &= \tau_0, \tau_1 = \tau_1, \zeta_0 = \frac{h_2^4 \xi_1 \tau_1}{h_3 + h_2^2 (h_1 + 2\tau_0)}, \\ v &= \frac{-\xi_1 (h_3 + h_2^2 h_3 \tau_0 + h_2^4 \tau_0^2 + h_1 h_2^2 (h_3 + h_2^2 \tau_0)) + h_2^2 \xi_0 (h_3 + h_2^2 (h_1 + 2\tau_0)) \tau_1}{h_2^2 (h_1 h_2^2 + h_3) \xi_1}, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

bulunur.

(4.2.8) katsayıları (3.1.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = A_5 \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_2} + \frac{\xi_1}{\xi_2} \Gamma + \Gamma^2}}, \quad (4.2.9)$$

elde edilir. Burada $A_5 = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_2}} = h_2$ 'dir.

(4.2.9) denklemi integre edilirse, (4.2.1) denkleminin çözümleri

$$(\eta - \eta_0) = A_5 \ln(\Gamma - \alpha_1) \quad (4.2.10)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = 2A_5 \ln \left[\sqrt{\Gamma - \alpha_1} + \sqrt{\Gamma - \alpha_2} \right], \quad \alpha_2 > \alpha_1, \quad (4.2.11)$$

şeklinde elde edilir. Burada α_1 ve α_2

$$\Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_2} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_2} = 0, \quad (4.2.12)$$

polinom denkleminin kökleridir. Daha sonra (4.2.9) ve (4.2.10) denklemleri (3.1.4)

denkleminde yerine yazılarak, (4.2.2) denklemi yardımıyla (4.2.1) denkleminin hareketli dalga çözümleri,

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \left[\alpha_1 + e^{\pm \frac{\left(\left(x - \frac{-\xi_1 (h_3 + h_2^2 h_3 \tau_0 + h_2^4 \tau_0^2 + h_1 h_2^2 (h_3 + h_2^2 \tau_0)) + h_2^2 \xi_0 (h_3 + h_2^2 (h_1 + 2\tau_0)) \tau_1}{h_2^2 (h_1 h_2^2 + h_3) \xi_1} \right) t \right) - \eta_0}{h_2}} \right], \quad (4.2.13)$$

$$u(x, t) = \tau_0 + \frac{\tau_1}{4} \left[\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2) + e^{\pm \frac{\left(\left(x - \frac{-\xi_1 (h_3 + h_2^2 h_3 \tau_0 + h_2^4 \tau_0^2 + h_1 h_2^2 (h_3 + h_2^2 \tau_0)) + h_2^2 \xi_0 (h_3 + h_2^2 (h_1 + 2\tau_0)) \tau_1}{h_2^2 (h_1 h_2^2 + h_3) \xi_1} \right) t \right) - \eta_0}{h_2}}}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} e^{\pm \frac{\left(\left(x - \frac{-\xi_1 (h_3 + h_2^2 h_3 \tau_0 + h_2^4 \tau_0^2 + h_1 h_2^2 (h_3 + h_2^2 \tau_0)) + h_2^2 \xi_0 (h_3 + h_2^2 (h_1 + 2\tau_0)) \tau_1}{h_2^2 (h_1 h_2^2 + h_3) \xi_1} \right) t \right) - \eta_0}{h_2}} \right], \quad (4.2.14)$$

şeklinde elde edilir. $\eta_0 = 0$, $\tau_0 = -\tau_1 \alpha_1$ ise, (4.2.13) denklemi,

$$u(x, t) = \left[\tilde{A} e^{\tilde{B} \left(x - \frac{-\xi_1 (h_3 + h_2^2 h_3 \tau_0 + h_2^4 \tau_0^2 + h_1 h_2^2 (h_3 + h_2^2 \tau_0)) + h_2^2 \xi_0 (h_3 + h_2^2 (h_1 + 2\tau_0)) \tau_1}{h_2^2 (h_1 h_2^2 + h_3) \xi_1} t \right)} \right], \quad (4.2.15)$$

şekline indirgenir. Burada $\tilde{A} = \tau_1$, $\tilde{B} = \pm \frac{1}{A_5}$ şeklindedir.

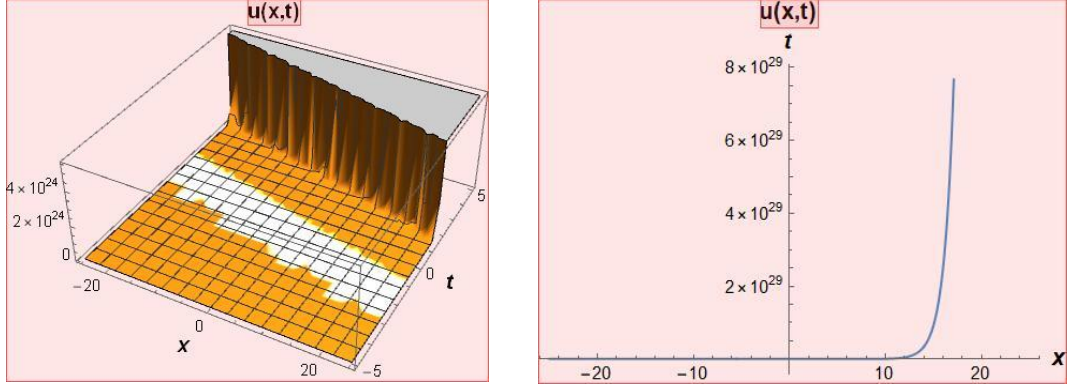
Eğer $\eta_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ ise, (4.2.14) denkleminin hiperbolik fonksiyon çözümü,

$$u(x, t) = \tau_0 + \frac{\tau_1}{2} \left(1 + \cosh(\tilde{B}(x - vt)) \right), \quad (4.2.16)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$v = \frac{-\xi_1 (h_3 + h_2^2 h_3 \tau_0 + h_2^4 \tau_0^2 + h_1 h_2^2 (h_3 + h_2^2 \tau_0)) + h_2^2 \xi_0 (h_3 + h_2^2 (h_1 + 2\tau_0)) \tau_1}{h_2^2 (h_1 h_2^2 + h_3) \xi_1},$$

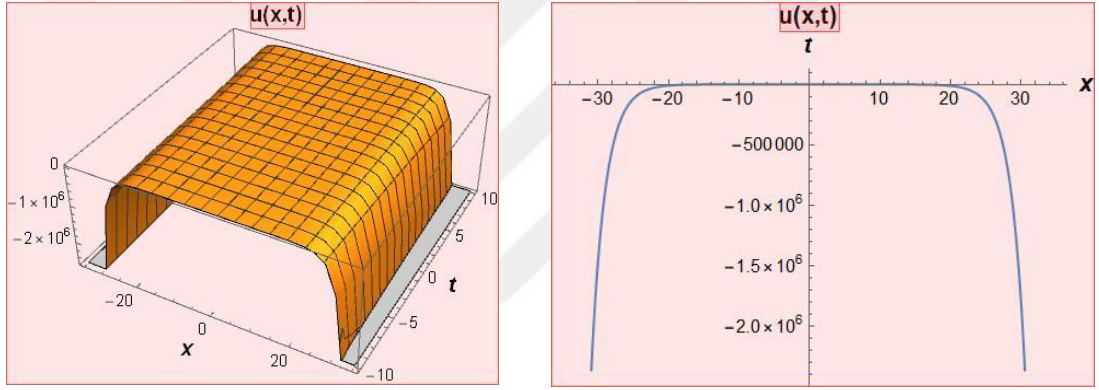
şeklindedir.



Şekil 4.4. Dullin-Gottwald-Holm Dinamik Denkleminin GDDM ile elde edilen (4.2.15) çözümüne ait

$$\tau_0 = 1, \tau_1 = 2, h_1 = 2, h_2 = 1, h_3 = -1, \xi_0 = 3, \xi_1 = -1, -25 \leq x \leq 25,$$

$-5 \leq t \leq 5$ ve $t = 3$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.



Şekil 4.5. Dullin-Gottwald-Holm Dinamik Denkleminin GDDM ile elde edilen (4.2.16) çözümüne ait

$$\tau_0 = 1, \tau_1 = -2, h_1 = -2, h_2 = 2, h_3 = 1, \xi_0 = -2, \xi_1 = -1, -35 \leq x \leq 35,$$

$-10 \leq t \leq 10$ ve $t = 2$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 2: (4.2.4) denkleminde eğer $\varepsilon = 0$, $\delta = 2$ ve $\vartheta = 2$ ise,

$$(u')^2 = \frac{(\tau_1 + 2\Gamma\tau_2)^2 (\xi_0 + \Gamma\xi_1 + \Gamma^2\xi_2)}{\zeta_0}, \quad (4.2.17)$$

$$u'' = \frac{4\tau_2 (\xi_0 + \Gamma\xi_1 + \Gamma^2\xi_2) + (\xi_1 + 2\Gamma\xi_2)(\tau_1 + 2\Gamma\tau_2)}{2\zeta_0}, \quad (4.2.18)$$

elde edilir. Burada $\xi_2 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$ 'dır.

(3.1.9) cebirsel denklem sisteminin çözümü,

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \xi_0, \quad \xi_1 = \xi_1, \quad \xi_2 = -\frac{h_2^2 \xi_1^2 \tau_1}{3(h_1 h_2^2 + h_3) \xi_1 - 4h_2^2 \xi_0 \tau_1}, \\ \zeta_0 &= -\frac{h_2^4 \xi_1^2 \tau_1}{3(h_1 h_2^2 + h_3) \xi_1 - 4h_2^2 \xi_0 \tau_1}, \quad \tau_0 = -2h_1 - \frac{2h_3}{h_2^2} + \frac{2\xi_0 \tau_1}{\xi_1}, \\ \tau_1 &= \tau_1, \quad \tau_2 = 0, \quad v = -2h_1 - \frac{3h_3}{h_2^2} + \frac{3\xi_0 \tau_1}{\xi_1},\end{aligned}\tag{4.2.19}$$

elde edilir. Bu çözümleri (3.1.5) ve (3.1.10) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = A_6 \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_2} + \frac{\xi_1}{\xi_2} \Gamma + \Gamma^2}},\tag{4.2.20}$$

elde edilir. Burada $A_6 = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_2}} = h_2$ 'dir.

(4.2.20) denkleminin integrali alınır (4.2.1) denkleminin çözümleri,

$$\pm(\eta - \eta_0) = A_6 \ln(\Gamma - \alpha_1),\tag{4.2.21}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = 2A_6 \ln\left[\sqrt{\Gamma - \alpha_1} + \sqrt{\Gamma - \alpha_2}\right], \quad \alpha_2 > \alpha_1,\tag{4.2.22}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca α_1 ve α_2 (4.2.12) polinom denkleminin kökleridir.

(4.2.21) ve (4.2.22) denklemleri (3.1.4) denkleminde yerine yazılırsa (4.2.1) denkleminin hareketli dalga çözümleri,

$$u(x, t) = \left[\tau_0 + \tau_1 h_1 + \tau_1 e^{\pm \frac{(x-vt-\eta_0)}{h_2}} + \tau_2 \left(h_1 + e^{\pm \frac{(x-vt-\eta_0)}{h_2}} \right)^2 \right],\tag{4.2.23}$$

$$u(x, t) = \left[\tau_0 + \frac{\tau_1}{4} \left(2(h_2 + h_1) + e^{\pm \frac{(x-vt-\eta_0)}{h_2}} + (h_1 - h_2)^2 e^{\mp \frac{(x-vt-\eta_0)}{h_2}} \right) + \frac{\tau_2}{16} \left(2(h_2 + h_1) + e^{\pm \frac{(x-vt-\eta_0)}{h_2}} + (h_1 - h_2)^2 e^{\mp \frac{(x-vt-\eta_0)}{h_2}} \right)^2 \right],\tag{4.2.24}$$

elde edilir. Eğer $\eta_0 = 0$ ise, (4.2.23) denkleminin çözümleri,

$$u(x, t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 + e^{B_1 \left(x - \left(-2\alpha_1 - \frac{3\alpha_3}{\alpha_2^2} + \frac{3\xi_0\tau_1}{\xi_1} \right) t \right)} \right)^i \right], \quad (4.2.25)$$

denkleminde indirgenir. Burada $B_1 = \pm \frac{1}{A_6}$, $v = -2h_1 - \frac{3h_3}{h_2^2} + \frac{3\xi_0\tau_1}{\xi_1}$ 'dır.

Eğer $\eta_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ ise, (4.2.25) denkleminin çözümleri,

$$u(x, t) = \left[\sum_{i=0}^2 \frac{\tau_i}{2^i} (1 + \cosh(B_1(x - vt)))^i \right], \quad (4.2.26)$$

denkleminde indirgenir.

Durum 3: (4.2.4) denkleminde eğer $\varepsilon = 1$, $\delta = 1$ ve $\vartheta = 3$ ise,

$$(u')^2 = \frac{\tau_1^2 (\xi_0 + \Gamma \xi_1 + \Gamma^2 \xi_2 + \Gamma^3 \xi_3)}{\zeta_0 + \Gamma \zeta_1}, \quad (4.2.27)$$

$$u'' = \frac{((\zeta_0 + \Gamma \zeta_1)(\xi_1 + 2\Gamma \xi_2 + 3\Gamma^2 \xi_3) - \zeta_1(\xi_0 + \Gamma \xi_1 + \Gamma^2 \xi_2 + \Gamma^3 \xi_3))\tau_1}{2(\zeta_0 + \Gamma \zeta_1)^2}, \quad (4.2.28)$$

elde edilir. Burada $\xi_3 \neq 0$, $\zeta_1 \neq 0$ 'dır. (3.1.9) cebirsel denklem sisteminin çözümü,

$$\xi_1 = \frac{h_2^4 \xi_2^2 \tau_0 (2h_3 + h_2^2 (2h_1 + \tau_0))}{\zeta_1 (h_3 + h_2^2 (h_1 + 2\tau_0))^2}, \quad \xi_2 = \xi_2, \quad \xi_3 = \frac{\zeta_1}{h_2^2}, \quad \zeta_0 = 0, \quad (4.2.29)$$

$$\zeta_1 = \zeta_1, \quad \tau_0 = \tau_0, \quad \tau_1 = \frac{\zeta_1 (h_3 + h_2^2 (h_1 + 2\tau_0))}{h_2^4 \xi_2}, \quad v = -\frac{h_3}{h_2^2} + \tau_0, \quad (4.2.30)$$

elde edilir. (4.2.29), (4.2.30) denklemleri (3.1.5) ve (3.1.10) denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\pm(\eta - \eta_0) = A_7 \int \frac{\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta_1} + \Gamma}}{\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_3} + \frac{\xi_1}{\xi_3} \Gamma + \frac{\xi_2}{\xi_3} \Gamma^2 + \Gamma^3}} d\Gamma, \quad (4.2.31)$$

elde edilir. Burada $A_7 = \sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_3}} = h_2$ 'dir. (4.2.31) denkleminin integrali alınırsa (4.2.1)

denkleminin çözümleri,

$$\pm(\eta - \eta_0) = 2A_7 \left(\ln \left| \sqrt{\frac{\xi_0 + \xi_1 \Gamma}{\xi_1}} + \sqrt{\Gamma - \alpha_1} \right| - \sqrt{\frac{\xi_0 + \xi_1 \Gamma}{\xi_1 (\Gamma - \alpha_1)}} \right), \quad (4.2.32)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A_7}{\sqrt{\xi_1 (\alpha_2 - \alpha_1)}} \left\{ \sqrt{\xi_0 + \xi_1 \alpha_1} \arctan \left[\sqrt{\frac{(\xi_0 + \xi_1 \alpha_1)(\Gamma - \alpha_2)}{(\xi_0 + \xi_1 \Gamma)(\alpha_2 - \alpha_1)}} \right] + \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1} \ln \left| \sqrt{\frac{\xi_0 + \xi_1 \Gamma}{\xi_1}} + \sqrt{\Gamma - \alpha_2} \right| \right\}, \quad (4.2.33)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A_7 ((\xi_0 + \xi_1 \alpha_1) F(\varphi, l) + (\alpha_3 - \xi_1 \alpha_1) \pi(\varphi, n, l))}{\sqrt{\xi_1 (\alpha_1 - \alpha_2) (\xi_0 + \xi_1 \alpha_3)}}, \quad (4.2.34)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$F(\varphi, l) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \psi}}, \quad \pi(\varphi, n, l) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{(1 + n \sin^2 \psi) \sqrt{1 - l^2 \sin^2 \psi}}, \quad (4.2.35)$$

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_1)}{(\Gamma - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}}, \quad n = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad l^2 = \frac{(\xi_0 + \xi_1 \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}{(\xi_0 + \xi_1 \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad (4.2.36)$$

şeklindedir. Ayrıca α_1 , α_2 ve α_3

$$\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_3} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_3} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_3} = 0, \quad (4.2.37)$$

polinom denkleminin kökleridir.

4.3.Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine Denklemi ve Uygulaması

Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine Denklemi,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b u^q \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial t} = 0, \quad (4.3.1)$$

şeklinde verilsin. Burada a , b , c ve q sıfırdan farklı sabitlerdir. (4.3.1) lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümlerini bulmak için GDDM'yi kullanalım. (4.3.1) denklemi için;

$$u(x, t) = U(\eta), \quad \eta = x - \lambda t, \quad (4.3.2)$$

dönüşümü ele alınırsa, (4.3.1) denklemi,

$$-\lambda U_\eta + a U_\eta + b U'' U_\eta - \lambda c U_{\eta\eta\eta} = 0, \quad (4.3.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemine dönüşür.

$$U = V^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.4)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$-cq(q+1)\lambda V V_\eta + c(q^2 - 1)\lambda V_\eta^2 + q^2(1+q)(a - \lambda)V^2 + bq^2V^3 = 0, \quad q \neq 0, \quad q \neq \pm 1, \quad (4.3.5)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemine dönüşür. (4.3.5) denkleminde (3.1.6) ve (3.1.7) eşitliği yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa,

$$\mathcal{G} = \varepsilon + \delta + 2, \quad (4.3.6)$$

şeklinde dengeleme bağıntısı elde edilir.

Durum 1: (4.3.6) denkleminde eğer $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$ ve $\mathcal{G} = 3$ ise,

$$(v')^2 = \frac{\tau_1^2 (\xi_3 \Gamma^3 + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_1 \Gamma + \xi_0)}{\zeta_0}, \quad (4.3.7)$$

$$v'' = \frac{\tau_1 (3\xi_3 \Gamma^2 + 2\xi_2 \Gamma + \xi_1)}{2\zeta_0}, \quad (4.3.8)$$

elde edilir. Burada $\xi_3 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$ 'dır. (3.1.9) cebirsel denklem sisteminin çözümü,

$$\xi_0 = \xi_0, \quad \xi_1 = \xi_1, \quad \xi_2 = \frac{(-4+q)q\xi_1^2}{4(-1+q)^2 \xi_0}, \quad \xi_3 = -\frac{q^2 \xi_1^3}{4(-1+q)^3 \xi_0^2}, \quad (4.3.9)$$

$$\zeta_0 = -\frac{c(q+2)\xi_1^2(a+aq+b\tau_0)}{4b(q-1)^2 q \xi_0 \tau_0}, \quad \tau_0 = \tau_0, \quad \tau_1 = \frac{q \xi_1 \tau_0}{2(q-1)\xi_0}, \quad \lambda = a + \frac{b\tau_0}{q+1}, \quad (4.3.10)$$

şeklindedir. Bu sonuçlar (3.1.5) ve (3.1.10) denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\pm(\eta - \eta_0) = \sqrt{A_8} \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_3} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_3} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_3}}}, \quad (4.3.11)$$

bulunur. (4.3.11) denkleminin integrali alındığında (4.3.1) denkleminin çözümleri,

$$\pm(\eta - \eta_0) = -2\sqrt{A_8} \frac{1}{\sqrt{\Gamma - \alpha_1}}, \quad (4.3.12)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = 2\sqrt{\frac{A_8}{\alpha_2 - \alpha_1}} \arctan \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}}, \quad \alpha_2 > \alpha_1, \quad (4.3.13)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \sqrt{\frac{A_8}{\alpha_1 - \alpha_2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\Gamma - \alpha_2} - \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{\sqrt{\Gamma - \alpha_2} + \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad (4.3.14)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = 2\sqrt{\frac{A_8}{\alpha_1 - \alpha_3}} F(\varphi, l), \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3, \quad (4.3.15)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$A_8 = \frac{\xi_0}{\xi_3} = \frac{\xi_0 c (q-1)(q+2)(a + aq + b\tau_0)}{bq^3 \tau_0 \xi_1}, \quad F(\varphi, l) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{1 - l^2 \sin^2 \psi}, \quad (4.3.16)$$

$$\text{ve } \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}}, \quad l^2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}, \quad (4.3.17)$$

şeklindedir. Ayrıca α_1, α_2 ve α_3

$$\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_3} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_3} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_3} = 0, \quad (4.3.18)$$

polinom denkleminin kökleridir. (4.3.12)-(4.3.15) çözümleri (3.1.4) ve (4.3.4) denklemlerinde yerine yazılırsa, (4.3.1) denkleminin sırasıyla rasyonel, hiperbolik ve Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri,

$$u(x, t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{4\tau_1 A_8}{\left(x - \left(a + \frac{b\tau_0}{q+1} \right) t - \eta_0 \right)^2} \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.19)$$

$$u(x, t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \tanh^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A_8}} \left(x - \left(a + \frac{b\tau_0}{q+1} \right) t - \eta_0 \right) \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.20)$$

$$u(x, t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cosech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A_8}} \left(x - \left(a + \frac{b\tau_0}{q+1} \right) t \right) \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.21)$$

$$u(x, t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_3 + \tau_1 (\alpha_2 - \alpha_3) \operatorname{sn}^2 \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{A_8}} \left(x - \left(a + \frac{b\tau_0}{q+1} \right) t - \eta_0 \right), \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3} \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.22)$$

şeklinde elde edilir.

Eğer $\tau_0 = -\tau_1 \alpha_1$ ve $\eta_0 = 0$ ise, (4.3.19)-(4.3.21) çözümleri,

$$u(x,t) = \left(\frac{2\sqrt{\tilde{A}}}{x - \left(a + \frac{b\tau_0}{q+1} \right) t} \right)^{\frac{2}{q}}, \quad (4.3.23)$$

rasyonel fonksiyon çözümüne,

$$u(x,t) = \frac{A_9}{\cosh^{\frac{2}{q}} \left[B_2 \left(x - \left(a + \frac{b\tau_0}{q+1} \right) t \right) \right]}, \quad (4.3.24)$$

soliton çözümüne,

$$u(x,t) = \frac{A_{10}}{\sinh^{\frac{2}{q}} \left[B_2 \left(x - \left(a + \frac{b\tau_0}{q+1} \right) t \right) \right]}, \quad (4.3.25)$$

tekil soliton çözümüne indirgenir. Burada

$$\tilde{A} = \tau_1 A_8, \quad A_9 = \left(\tau_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad A_{10} = \left(\tau_1 (\alpha_1 - \alpha_2) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad B_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A_8}}, \quad \lambda = a + \frac{b\tau_0}{q+1},$$

şeklindedir.

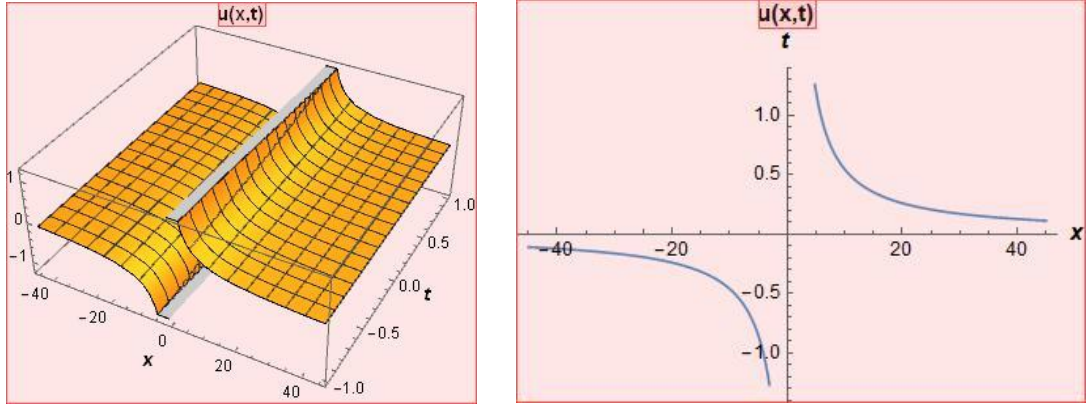
A_9 ve A_{10} genlikler, λ solitonların hızı, B_2 solitonların ters genişliğidir. Burada solitonların $\tau_1 > 0$ için var olduğu söylenebilir.

Eğer $\tau_0 = -\tau_1 \alpha_3$ ve $\eta_0 = 0$ ise, (4.3.22) denklemi

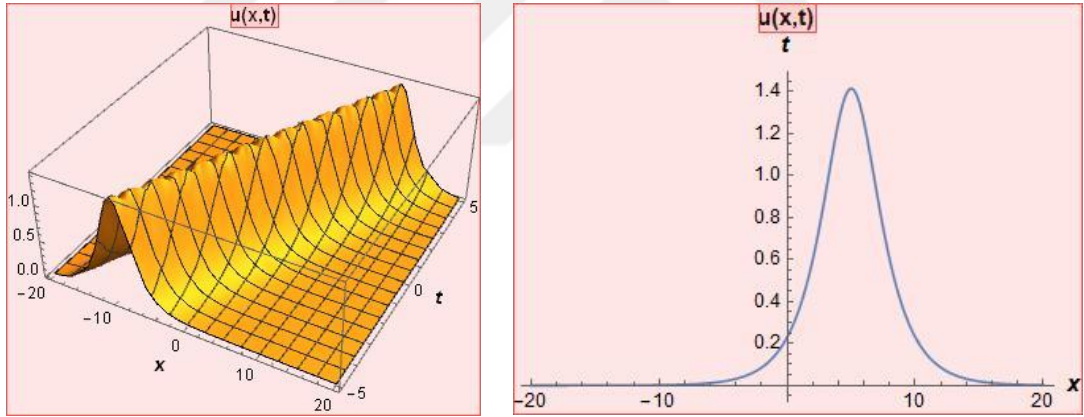
$$u_i(x,t) = A_{11} sn^{\frac{2}{q}} \left[B_i \left(x - \left(a + \frac{b\tau_0}{q+1} \right) t \right), \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3} \right], \quad (4.3.26)$$

şeklinde Jakobi eliptik fonksiyon çözümüne indirgenir. Burada $A_{11} = \left(\tau_1 (\alpha_2 - \alpha_3) \right)^{\frac{1}{q}}$ ve

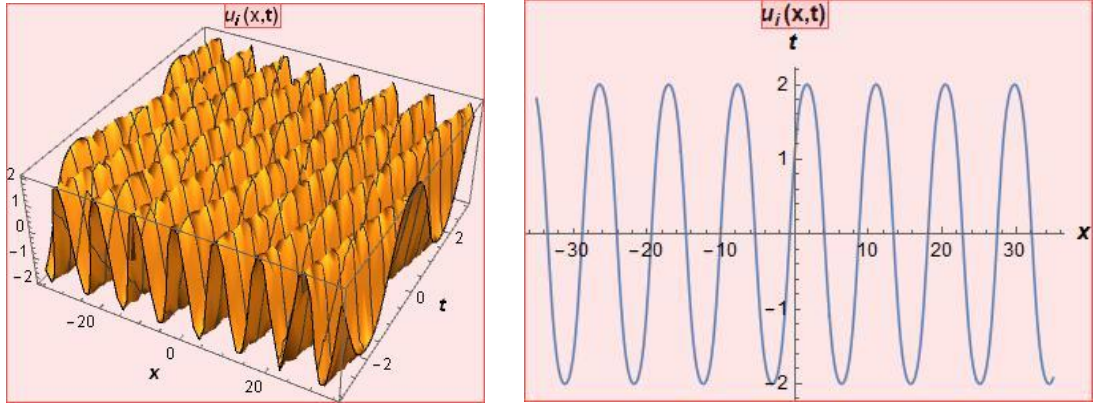
$$B_i = \frac{(-1)^i}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{A_8}}, \quad (i=1,2) \text{ şeklindedir.}$$



Şekil 4.6. Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine Denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.23) çözümüne ait $\tau_0 = 1$, $\tau_1 = 3$, $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$, $\xi_0 = 5$, $\xi_1 = -3$, $q = 2$, $-45 \leq x \leq 45$, $-1 \leq t \leq 1$ ve $t = 0.5$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.



Şekil 4.7. Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine Denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.24) çözümüne ait $\tau_0 = -3$, $\tau_1 = 2$, $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$, $\xi_0 = 3$, $\xi_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $q = 2$, $-20 \leq x \leq 20$, $-5 \leq t \leq 5$ ve $t = 2.5$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.



Şekil 4.8. Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine Denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.26) çözümüne

ait $\tau_0 = -2$, $\tau_1 = 2$, $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$, $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = 6$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 3$,

$\alpha_3 = 1$, $q = 2$, $-35 \leq x \leq 35$, $-3 \leq t \leq 3$ ve $t = 1.5$ değerleri için

sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.

Açıklama 1: $l \rightarrow 1$ ise, (4.3.1) denkleminin (4.3.26) çözümü,

$$u_i(x, t) = A_{11} \tanh^{\frac{2}{q}} \left[B_l \left(x - \left(a + \frac{b\tau_0}{q+1} \right) t \right) \right], \quad (4.3.27)$$

şeklinde dark soliton çözümüne indirgenir. Burada $\alpha_1 = \alpha_2$ ve $\lambda = \left(a + \frac{b\tau_0}{q+1} \right)$ dark solitonun hızını temsil eder.

Durum 2: (4.3.6) denkleminde eğer $\varepsilon = 0$, $\delta = 2$ ve $\vartheta = 4$ ise,

$$(v')^2 = \frac{(\tau_1 + 2\tau_2\Gamma)^2 (\xi_4\Gamma^4 + \xi_3\Gamma^3 + \xi_2\Gamma^2 + \xi_1\Gamma + \xi_0)}{\zeta_0}, \quad (4.3.28)$$

$$v'' = \frac{(\tau_1 + 2\tau_2\Gamma)(4\xi_4\Gamma^3 + 2\xi_3\Gamma^2 + 2\xi_2\Gamma + \xi_1)}{2\zeta_0} + \frac{2\tau_2(\xi_4\Gamma^4 + \xi_3\Gamma^3 + \xi_2\Gamma^2 + \xi_1\Gamma + \xi_0)}{\zeta_0}, \quad (4.3.29)$$

elde edilir. Burada $\xi_4 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$ 'dır. (3.1.9) cebirsel denklem sisteminin çözümü,

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{-bq^2\zeta_0\tau_1^4 + 4c\xi_1\tau_1\tau_2(b\tau_1^2 + 2a(q+1)(q+2)\tau_2)}{32c\tau_2^2(b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}, \quad \xi_1 = \xi_1, \\
\xi_2 &= \frac{bq^2\zeta_0\tau_1^3 + 2c\xi_1\tau_2(3b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{2c\tau_1(b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}, \\
\xi_3 &= \frac{b\tau_2(q^2\zeta_0\tau_1 + 4c\xi_1\tau_2)}{bc\tau_1^2 + ac(q+1)(q+2)\tau_2}, \quad \xi_4 = \frac{b\tau_2^2(q^2\zeta_0\tau_1 + 4c\xi_1\tau_2)}{2c\tau_1(b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}, \\
\tau_0 &= \frac{\tau_1^2}{4\tau_2}, \quad \tau_1 = \tau_1, \quad \lambda = \frac{q^2\zeta_0\tau_1(b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{(q+1)(q+2)\tau_2(q^2\zeta_0\tau_1 + 4c\xi_1\tau_2)},
\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

şeklinde bulunur. Bu sonuçlar (3.1.5) ve (3.1.10) denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\pm(\eta - \eta_0) = \sqrt{\frac{2k^2\gamma\tau_1\zeta_0(\delta\tau_1^2 + \tau_2(q+1)(q+2))}{\delta\tau_2^2(4k^2\delta\xi_1\tau_2 - q^2\zeta_0\tau_1)}} \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_4}\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4}\Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4}\Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4}}}, \tag{4.3.31}$$

elde edilir. (4.3.31) denkleminin integrali alındığında (4.3.1) denkleminin çözümleri,

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{A_{12}}{\Gamma - \alpha_1}, \tag{4.3.32}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A_{12}}{\alpha_1 - \alpha_2} \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_2}{\Gamma - \alpha_1}}, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \tag{4.3.33}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{A_{12}}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \left| \frac{\Gamma - \alpha_1}{\Gamma - \alpha_2} \right|, \tag{4.3.34}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A_{12}}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} - \sqrt{(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}}{\sqrt{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \sqrt{(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3, \tag{4.3.35}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A_{12}}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}} F(\varphi, l), \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4, \tag{4.3.36}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
A_{12} &= \sqrt{\frac{2k^2\gamma\tau_1\zeta_0(\delta\tau_1^2 + \tau_2(q+1)(q+2))}{\delta\tau_2^2(4k^2\delta\xi_1\tau_2 - q^2\zeta_0\tau_1)}}, \\
\varphi &= \arcsin \sqrt{\frac{(\Gamma - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_4)}}, \quad l^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)},
\end{aligned} \tag{4.3.37}$$

şeklindedir. Ayrıca $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4

$$\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_4} \Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4} = 0, \quad (4.3.38)$$

polinom denkleminin kökleridir. (4.3.32)-(4.3.36) arasındaki çözümleri (3.1.4) ve (4.3.4)'de yerine yazılırsa

$$u(x, t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 \pm \frac{\tau_1 A_{12}}{x - \lambda t - \eta_0} + \tau_2 \left(\alpha_1 \pm \frac{A_{12}}{x - \lambda t - \eta_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.39)$$

$$u(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} \tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{4A_{12}^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \tau_1}{4A_{12}^2 - \left[(\alpha_1 - \alpha_2) \left(x - \frac{q^2 \zeta_0 \tau_1 (b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{(q+1)(q+2)\tau_2 (q^2 \zeta_0 \tau_1 + 4c\xi_1 \tau_2)} t - \eta_0 \right) \right]^2} + \\ \tau_2 \left(\alpha_1 + \frac{4A_{12}^2 (\alpha_2 - \alpha_1)}{4A_{12}^2 - \left[(\alpha_1 - \alpha_2) \left(x - \frac{q^2 \zeta_0 \tau_1 (b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{(q+1)(q+2)\tau_2 (q^2 \zeta_0 \tau_1 + 4c\xi_1 \tau_2)} t - \eta_0 \right) \right]^2} \right)^2 \end{array} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.40)$$

$$u(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} \tau_0 + \tau_1 \alpha_2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \tau_1}{\exp \left[\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_{12}} \left(x - \frac{q^2 \zeta_0 \tau_1 (b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{(q+1)(q+2)\tau_2 (q^2 \zeta_0 \tau_1 + 4c\xi_1 \tau_2)} t - \eta_0 \right) \right] - 1} \\ + \tau_2 \left(\alpha_2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\exp \left[\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_{12}} \left(x - \frac{q^2 \zeta_0 \tau_1 (b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{(q+1)(q+2)\tau_2 (q^2 \zeta_0 \tau_1 + 4c\xi_1 \tau_2)} t - \eta_0 \right) \right] - 1} \right)^2 \end{array} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.41)$$

$$u(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} \tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \tau_1}{\exp \left[\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_{12}} \left(x - \frac{q^2 \zeta_0 \tau_1 (b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{(q+1)(q+2)\tau_2 (q^2 \zeta_0 \tau_1 + 4c\xi_1 \tau_2)} t - \eta_0 \right) \right] - 1} \\ + \tau_2 \left(\alpha_1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{\exp \left[\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_{12}} \left(x - \frac{q^2 \zeta_0 \tau_1 (b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{(q+1)(q+2)\tau_2 (q^2 \zeta_0 \tau_1 + 4c\xi_1 \tau_2)} t - \eta_0 \right) \right] - 1} \right)^2 \end{array} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.42)$$

$$u(x,t) = \left\{ \begin{aligned} & \tau_0 + \tau_1 \alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\tau_1}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{A_{12}} (x - \lambda t - \eta_0) \right]} \right\}^{\frac{1}{q}} \\ & + \tau_2 \left\{ \alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{A_{12}} (x - \lambda t - \eta_0) \right]} \right\}^2 \end{aligned} \right\}, \quad (4.3.43)$$

$$u(x,t) = \left\{ \begin{aligned} & \tau_0 + \tau_1 \alpha_2 + \frac{\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2 \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2A_{12}} (x - \lambda t - \eta_0), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \right]} \right\}^{\frac{1}{q}} \\ & + \tau_2 \left\{ \alpha_2 + \frac{\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2 \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2A_{12}} (x - \lambda t - \eta_0), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \right]} \right\}^2 \end{aligned} \right\}, \quad (4.3.44)$$

elde edilir. Burada $\lambda = \frac{q^2 \zeta_0 \tau_1 (b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{(q+1)(q+2)\tau_2 (q^2 \zeta_0 \tau_1 + 4c\xi_1 \tau_2)}$, dir.

$\eta_0 = 0$ ise, (4.3.39)-(4.3.44) denklemlerinin çözümleri,

$$u(x,t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 \pm \frac{A_{12}}{\left(x - \frac{q^2 \zeta_0 \tau_1 (b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{(q+1)(q+2)\tau_2 (q^2 \zeta_0 \tau_1 + 4c\xi_1 \tau_2)} t \right)} \right)^i \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.45)$$

$$u(x,t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 + \frac{4A_{12}^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{4A_{12}^2 - \left[(\alpha_1 - \alpha_2) \left(x - \frac{q^2 \zeta_0 \tau_1 (b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{(q+1)(q+2)\tau_2 (q^2 \zeta_0 \tau_1 + 4c\xi_1 \tau_2)} t \right) \right]^2} \right)^i \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.46)$$

$$u(x,t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\exp \left[B_3 \left(x - \frac{q^2 \zeta_0 \tau_1 (b\tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{(q+1)(q+2)\tau_2 (q^2 \zeta_0 \tau_1 + 4c\xi_1 \tau_2)} t \right) \right] - 1} \right)^i \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.47)$$

$$u(x, t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\exp \left[B_3 \left(x - \frac{q^2 \zeta_0 \tau_1 (b \tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{(q+1)(q+2)\tau_2 (q^2 \zeta_0 \tau_1 + 4c \zeta_1 \tau_2)} t \right) \right] - 1} \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.48)$$

$$u(x, t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh[C(x - \lambda t)]} \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.49)$$

$$u(x, t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2(\varphi, l)} \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.50)$$

elde edilir. Burada

$$A_{12} = \sqrt{\frac{2k^2 \gamma \tau_1 \zeta_0 (\delta \tau_1^2 + \tau_2 (q+1)(q+2))}{\delta \tau_2^2 (4k^2 \delta \zeta_1 \tau_2 - q^2 \zeta_0 \tau_1)}}, \quad B_3 = \frac{k(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_{12}}, \quad C = \frac{k \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{A_{12}},$$

$$\varphi = \frac{k \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2A_{12}} (x - \lambda t), \quad l^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}, \quad \lambda = \frac{q^2 \zeta_0 \tau_1 (b \tau_1^2 + a(q+1)(q+2)\tau_2)}{(q+1)(q+2)\tau_2 (q^2 \zeta_0 \tau_1 + 4c \zeta_1 \tau_2)},$$

şeklindedir.

4.4. Gergin Dalga Denklemi ve Uygulaması

Lineer olmayan Gergin Dalga Denklemi,

$$u_{tt} - u_{xx} - \gamma \left(\alpha_1 (u^2)_{xx} - \alpha_3 u_{xxxx} + \alpha_4 u_{xxtt} \right) = 0, \quad (4.4.1)$$

şeklinde verilsin.

$$u(x, t) = U(\eta), \quad \eta = x - kt, \quad (4.4.2)$$

dönüşümü ele alınırsa (4.4.1) denklemi

$$(k^2 - 1)U'' - \gamma \alpha_1 (U^2)'' + \gamma (\alpha_3 - \alpha_4 k^2) U^{(4)} = 0, \quad (4.4.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemine dönüşür. İntegrasyon sabiti sıfır alınarak (4.4.3) denklemi iki kez integre edilirse,

$$\gamma(\alpha_3 - \alpha_4 k^2)U'' + (k^2 - 1)U - \gamma\alpha_1 U^2 = 0, \quad (4.4.4)$$

denklemini elde edilir. (3.1.6) ve (3.1.7) eşitlikleri (4.4.4) adi diferansiyel denkleminde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa,

$$\mathcal{G} = \delta + \varepsilon + 2, \quad (4.4.5)$$

dengeleme bağıntısı elde edilir.

Durum 1: (4.4.5) denkleminde eğer $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$ ve $\mathcal{G} = 3$ kullanılırsa,

$$(u')^2 = \frac{\tau_1^2 (\xi_3 \Gamma^3 + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_1 \Gamma + \xi_0)}{\zeta_0}, \quad (4.4.6)$$

$$u'' = \frac{\tau_1 (3\xi_3 \Gamma^2 + 2\xi_2 \Gamma + \xi_1)}{2\zeta_0}, \quad (4.4.7)$$

elde edilir. Burada $\xi_3 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$ 'dır. (3.1.9) cebirsel denklem sisteminin çözümü,

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi_0, \quad \xi_1 = \xi_1, \quad \xi_2 = \xi_2, \quad \xi_3 = \frac{\tau_1 (2\xi_2 \tau_0 - \xi_1 \tau_1)}{3\tau_0^2}, \\ \zeta_0 &= \frac{-2\xi_2 \tau_0 (-\alpha_3 + \alpha_4 (1 + \gamma\alpha_1 \tau_0)) + \xi_1 (-\alpha_3 + \alpha_4 (1 + 2\gamma\alpha_1 \tau_0)) \tau_1}{2\alpha_1 \tau_0^2}, \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

$$\tau_0 = \tau_0, \quad \tau_1 = \tau_1, \quad k = \sqrt{\frac{-2\xi_2 \tau_0 (1 + \gamma\alpha_1 \tau_0) + \xi_1 (1 + 2\gamma\alpha_1 \tau_0) \tau_1}{-2\xi_2 \tau_0 + \xi_1 \tau_1}},$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuçlar (3.1.5) ve (3.1.10) denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\pm(\eta - \eta_0) = \sqrt{A_{13}} \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_3} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_3} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_3}}}, \quad (4.4.9)$$

elde edilir. (4.4.9) denkleminin integrali alındığında (4.4.1) denkleminin çözümleri,

$$\pm(\eta - \eta_0) = -2\sqrt{A_{13}} \frac{1}{\sqrt{\Gamma - \alpha_1}}, \quad (4.4.10)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = 2\sqrt{\frac{A_{13}}{\alpha_2 - \alpha_1}} \arctan \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}}, \quad \alpha_2 > \alpha_1, \quad (4.4.11)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \sqrt{\frac{A_{13}}{\alpha_2 - \alpha_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\Gamma - \alpha_2} - \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{\sqrt{\Gamma - \alpha_2} + \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad (4.4.12)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = 2\sqrt{\frac{A_{13}}{\alpha_1 - \alpha_3}} F(\varphi, l), \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3, \quad (4.4.13)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$A_{13} = \frac{\xi_0}{\xi_3} = \frac{3(-2\xi_2\tau_0(-\alpha_3 + \alpha_4(1 + \gamma\alpha_1\tau_0)) + \xi_1(-\alpha_3 + \alpha_4(1 + 2\gamma\alpha_1\tau_0))\tau_1)}{2\alpha_1\tau_1(2\xi_2\tau_0 - \xi_1\tau_1)}, \quad (4.4.14)$$

$$F(\varphi, l) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{1 - l^2 \sin^2 \psi},$$

ve

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}}, \quad l^2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}, \quad (4.4.15)$$

şeklindedir. Ayrıca α_1 , α_2 ve α_3

$$\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_3} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_3} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_3} = 0, \quad (4.4.16)$$

polinom denkleminin kökleridir. (4.4.10)-(4.4.13) çözümleri (3.1.4) ve (4.4.2) denklemlerinde yerine yazılırsa (4.4.1) denkleminin sırasıyla rasyonel, hiperbolik ve Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri,

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{4\tau_1 A_{13}}{\left(x - \sqrt{\frac{-2\xi_2\tau_0(1 + \gamma\alpha_1\tau_0) + \xi_1(1 + 2\gamma\alpha_1\tau_0)\tau_1}{-2\xi_2\tau_0 + \xi_1\tau_1}} t - \eta_0\right)^2}, \quad (4.4.17)$$

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \tanh^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A_{13}}} (x - kt - \eta_0) \right), \quad (4.4.18)$$

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cosech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A_{13}}} (x - kt) \right), \quad (4.4.19)$$

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_3 + \tau_1 (\alpha_2 - \alpha_3) \operatorname{sn}^2 \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{A_3}} (x - kt - \eta_0), \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3} \right), \quad (4.4.20)$$

şeklinde elde edilir. Burada $k = \sqrt{\frac{-2\xi_2\tau_0(1 + \gamma\alpha_1\tau_0) + \xi_1(1 + 2\gamma\alpha_1\tau_0)\tau_1}{-2\xi_2\tau_0 + \xi_1\tau_1}}$ 'dir.

Eğer $\tau_0 = -\tau_1 \alpha_1$ ve $\eta_0 = 0$ ise, (4.4.17)-(4.4.19) çözümleri,

$$u(x, t) = \left(\frac{2\sqrt{\tilde{A}}}{x - \sqrt{\frac{-2\xi_2\tau_0(1 + \gamma\alpha_1\tau_0) + \xi_1(1 + 2\gamma\alpha_1\tau_0)\tau_1}{-2\xi_2\tau_0 + \xi_1\tau_1}} t} \right)^2, \quad (4.4.21)$$

rasyonel fonksiyon çözümüne,

$$u(x,t) = \frac{A_{14}}{\cosh^2 \left[B_4 \left(x - \sqrt{\frac{-2\xi_2\tau_0(1+\gamma\alpha_1\tau_0) + \xi_1(1+2\gamma\alpha_1\tau_0)\tau_1}{-2\xi_2\tau_0 + \xi_1\tau_1}} t \right) \right]}, \quad (4.4.22)$$

soliton çözümüne,

$$u(x,t) = \frac{A_{15}}{\sinh^2 \left[B_4 \left(x - \sqrt{\frac{-2\xi_2\tau_0(1+\gamma\alpha_1\tau_0) + \xi_1(1+2\gamma\alpha_1\tau_0)\tau_1}{-2\xi_2\tau_0 + \xi_1\tau_1}} t \right) \right]}, \quad (4.4.23)$$

tekil soliton çözümüne indirgenir. Burada $\tilde{A} = \tau_1 A_{13}$, $A_{14} = \tau_1(\alpha_2 - \alpha_1)$,

$A_{15} = \tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)$, $B_4 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A_{13}}}$ şeklindedir. A_{14} ve A_{15} genlikler, k solitonların

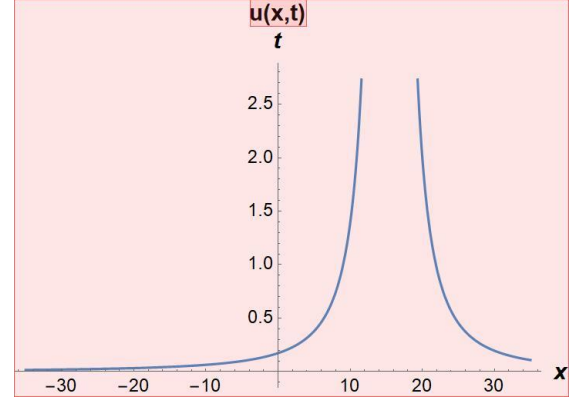
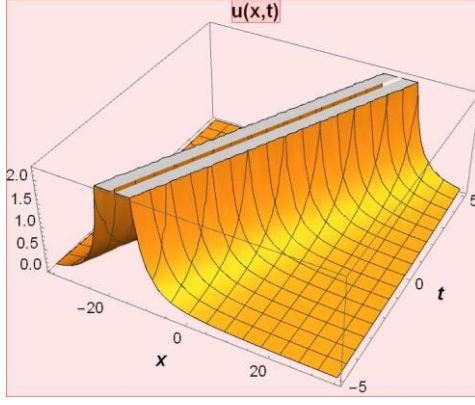
hızı, B_4 solitonların ters genişliğidir. Burada solitonların $\tau_1 > 0$ için var olduğu söylenebilir.

Eğer $\tau_0 = -\tau_1\alpha_3$ ve $\eta_0 = 0$ ise, (4.4.20) denklemi

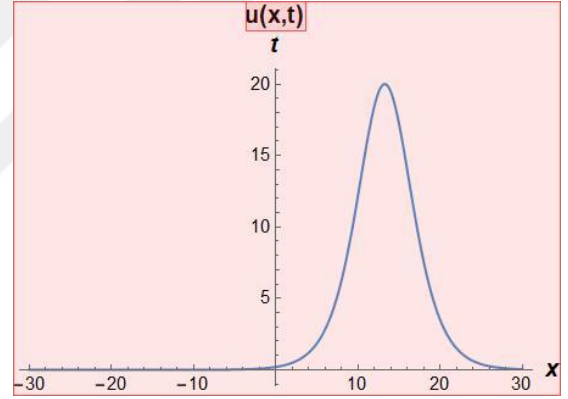
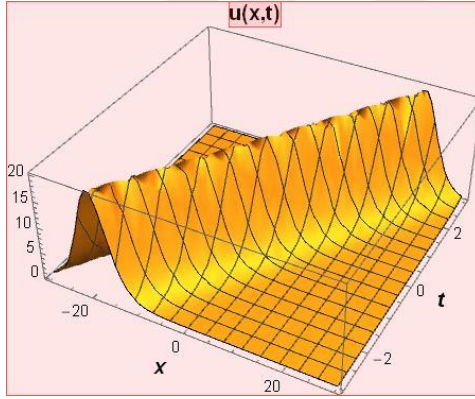
$$u_i(x,t) = A_{16} \operatorname{sn}^2 \left[B_i \left(x - \sqrt{\frac{-2\xi_2\tau_0(1+\gamma\alpha_1\tau_0) + \xi_1(1+2\gamma\alpha_1\tau_0)\tau_1}{-2\xi_2\tau_0 + \xi_1\tau_1}} t \right), \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3} \right], \quad (4.4.24)$$

şeklinde Jakobi eliptik fonksiyon çözümüne indirgenir. Burada $A_{16} = \tau_1(\alpha_2 - \alpha_3)$ ve

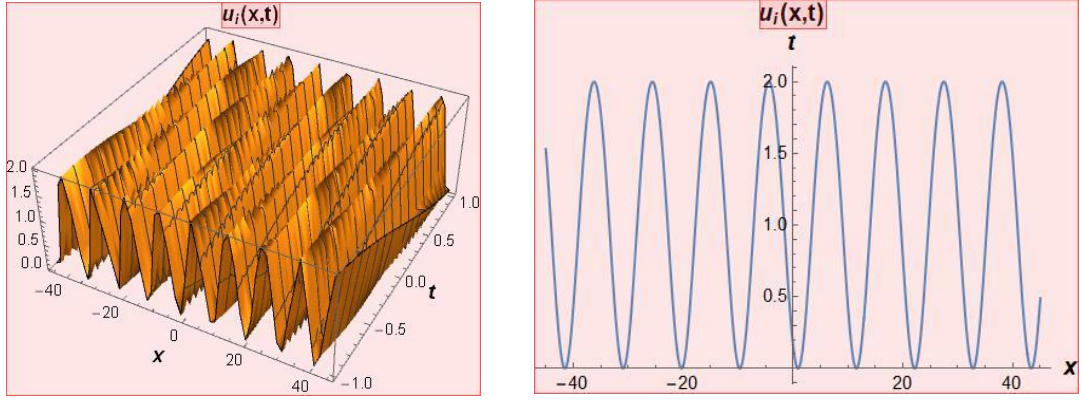
$$B_i = \frac{(-1)^i}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{A_{13}}}, \quad (i=1,2) \text{ 'dir.}$$



Şekil 4.9. Gergin Dalga Denkleminin GDDM ile elde edilen (4.4.21) çözümüne ait $\tau_0 = -1$, $\tau_1 = 2$, $\xi_1 = 4$, $\xi_2 = 1$, $\alpha_1 = -2$, $\alpha_3 = -2$, $\alpha_4 = 1$, $\gamma = 3$, $-35 \leq x \leq 35$, $-5 \leq t \leq 5$ ve $t = 4.5$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.



Şekil 4.10. Gergin Dalga Denkleminin GDDM ile elde edilen (4.4.22) çözümüne ait $\tau_0 = -2$, $\tau_1 = 5$, $\xi_1 = 3$, $\xi_2 = 1$, $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 2$, $\gamma = 4$, $-30 \leq x \leq 30$, $-3 \leq t \leq 3$ ve $t = 2$ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.



Şekil 4.11. Gergin Dalgı Denkleminin GDDM ile elde edilen (4.4.24) çözümüne ait $\tau_0 = -1$, $\tau_1 = 1$,

$$\xi_1 = 2, \xi_2 = 4, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 5, \alpha_3 = -3, \alpha_4 = 3, \gamma = 2, -45 \leq x \leq 45, \\ -1 \leq t \leq 1 \text{ ve } t = 0.5 \text{ değerleri için sırasıyla üç ve iki boyutlu grafikleri.}$$

Açıklama 1: $l \rightarrow 1$ ise, (4.4.1) denkleminin (4.4.24) çözümü,

$$u_i(x, t) = A_{16} \tanh^{\frac{2}{q}} \left[B_l \left(x - \sqrt{\frac{-2\xi_2\tau_0(1+\gamma\alpha_1\tau_0) + \xi_1(1+2\gamma\alpha_1\tau_0)\tau_1}{-2\xi_2\tau_0 + \xi_1\tau_1}} t \right) \right], \quad (4.4.25)$$

şeklinde dark soliton çözümüne indirgenir.

Burada $\alpha_1 = \alpha_2$ ve $k = \sqrt{\frac{-2\xi_2\tau_0(1+\gamma\alpha_1\tau_0) + \xi_1(1+2\gamma\alpha_1\tau_0)\tau_1}{-2\xi_2\tau_0 + \xi_1\tau_1}}$ dark solitonun hızını temsil eder.

Durum 2: (4.4.5) denkleminde eğer $\varepsilon = 0$, $\delta = 2$ ve $\vartheta = 4$ ise,

$$(v')^2 = \frac{(\tau_1 + 2\tau_2\Gamma)^2 (\xi_4\Gamma^4 + \xi_3\Gamma^3 + \xi_2\Gamma^2 + \xi_1\Gamma + \xi_0)}{\zeta_0}, \quad (4.4.26)$$

$$v'' = \frac{(\tau_1 + 2\tau_2\Gamma)(4\xi_4\Gamma^3 + 2\xi_3\Gamma^2 + 2\xi_2\Gamma + \xi_1)}{2\zeta_0} + \frac{2\tau_2(\xi_4\Gamma^4 + \xi_3\Gamma^3 + \xi_2\Gamma^2 + \xi_1\Gamma + \xi_0)}{\zeta_0}, \quad (4.4.27)$$

elde edilir. Burada $\xi_4 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$ 'dır. (3.1.9) cebirsel denklem sisteminin çözümü,

$$\xi_0 = \frac{\frac{\alpha_1 \zeta_0 \tau_1^6}{\alpha_3 - k^2 \alpha_4} - 24 \xi_1 \tau_1^3 \tau_2^2 + \frac{-36(-1+k^2)^2 \zeta_0^2 \tau_1^2 \tau_2^2 + 576 \gamma^2 (\alpha_3 - k^2 \alpha_4) \xi_1^2 \tau_2^4}{\gamma^2 \alpha_1 (\alpha_3 - k^2 \alpha_4) \zeta_0}}{288 \tau_1^2 \tau_2^3},$$

$$\xi_1 = \xi_1, \xi_2 = \frac{\xi_1 \tau_2}{\tau_1} + \frac{\alpha_1 \zeta_0 \tau_1^2}{6 \alpha_3 \tau_2 - 6 k^2 \alpha_4 \tau_2}, \xi_3 = \frac{\alpha_1 \zeta_0 \tau_1}{3 \alpha_3 - 3 k^2 \alpha_4}, \xi_4 = \frac{\alpha_1 \zeta_0 \tau_2}{6 \alpha_3 - 6 k^2 \alpha_4}, \quad (4.4.28)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{12} \left(\frac{\tau_1^2}{\tau_2} + \frac{6 \left(\frac{-1+k^2}{\gamma} + \frac{4(\alpha_3 - k^2 \alpha_4) \xi_1 \tau_2}{\zeta_0 \tau_1} \right)}{\alpha_1} \right), \tau_1 = \tau_1, k = k,$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuçlar (3.1.5) ve (3.1.10) denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\pm(\eta - \eta_0) = \sqrt{\frac{2k^2 \gamma \tau_1 \zeta_0 (\delta \tau_1^2 + \tau_2 (q+1)(q+2))}{\delta \tau_2^2 (4k^2 \delta \xi_1 \tau_2 - q^2 \zeta_0 \tau_1)}} \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_4} \Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4}}}, \quad (4.4.29)$$

elde edilir. (4.4.29) denkleminin integrali alındığında (4.4.1) denkleminin çözümleri,

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{A_{17}}{\Gamma - \alpha_1}, \quad (4.4.30)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A_{17}}{\alpha_1 - \alpha_2} \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_2}{\Gamma - \alpha_1}}, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad (4.4.31)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{A_{17}}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \left| \frac{\Gamma - \alpha_1}{\Gamma - \alpha_2} \right|, \quad (4.4.32)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A_{17}}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} - \sqrt{(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}}{\sqrt{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \sqrt{(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3, \quad (4.4.33)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A_{17}}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}} F(\varphi, l), \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4, \quad (4.4.34)$$

elde edilir. Burada

$$A_{17} = \sqrt{\frac{2k^2 \gamma \tau_1 \zeta_0 (\delta \tau_1^2 + \tau_2 (q+1)(q+2))}{\delta \tau_2^2 (4k^2 \delta \xi_1 \tau_2 - q^2 \zeta_0 \tau_1)}}, \quad (4.4.35)$$

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(\Gamma - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_4)}}, \quad l^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)},$$

şeklindedir. Ayrıca $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4

$$\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_4} \Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4} = 0, \quad (4.4.36)$$

polinom denkleminin kökleridir. (4.4.30)-(4.4.34) arasındaki çözümler (3.1.4) ve (4.4.2) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_1 \pm \frac{\tau_1 A_{17}}{x - kt - \eta_0} + \tau_2 \left(\alpha_1 \pm \frac{A_{17}}{x - kt - \eta_0} \right)^2, \quad (4.4.37)$$

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{4A_{17}^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \tau_1}{4A_{17}^2 - [(\alpha_1 - \alpha_2)x - kt - \eta_0]^2} + \tau_2 \left(\alpha_1 + \frac{4A_{17}^2 (\alpha_2 - \alpha_1)}{4A_{17}^2 - [(\alpha_1 - \alpha_2)x - kt - \eta_0]^2} \right)^2, \quad (4.4.38)$$

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \tau_1}{\exp \left[\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_{17}} (x - kt - \eta_0) \right] - 1} + \tau_2 \left(\alpha_2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\exp \left[\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_{17}} (x - kt - \eta_0) \right] - 1} \right)^2, \quad (4.4.39)$$

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \tau_1}{\exp \left[\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_{17}} (x - kt - \eta_0) \right] - 1} + \tau_2 \left(\alpha_1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{\exp \left[\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_{17}} (x - kt - \eta_0) \right] - 1} \right)^2, \quad (4.4.40)$$

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \tau_1}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{A_{17}} (x - kt - \eta_0) \right]} + \tau_2 \left(\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{A_{17}} (x - kt - \eta_0) \right]} \right)^2, \quad (4.4.41)$$

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_2 + \frac{\tau_1 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2 \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2A_{17}} (x - kt - \eta_0), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \right]} + \tau_2 \left(\alpha_2 + \frac{\tau_1 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2 \left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2A_{17}} (x - kt - \eta_0), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \right]} \right)^2, \quad (4.4.42)$$

elde edilir.

$\eta_0 = 0$ ise, (4.4.37)-(4.4.42) denklemlerinin çözümleri,

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 \pm \frac{A_{17}}{x - kt} \right)^i, \quad (4.4.43)$$

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 + \frac{4A_{17}^2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{4A_{17}^2 - [(\alpha_1 - \alpha_2)(x - kt)]^2} \right)^i, \quad (4.4.44)$$

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\exp[B_5(x - kt)] - 1} \right)^i, \quad (4.4.45)$$

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\exp[B_5(x - kt)] - 1} \right)^i, \quad (4.4.46)$$

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh[C(x - kt)]} \right)^i, \quad (4.4.47)$$

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2(\varphi, l)} \right)^i, \quad (4.4.48)$$

elde edilir. Burada

$$A_{17} = \sqrt{\frac{2k^2 \gamma \tau_1 \zeta_0 (\delta \tau_1^2 + \tau_2 (q+1)(q+2))}{\delta \tau_2^2 (4k^2 \delta \zeta_1 \tau_2 - q^2 \zeta_0 \tau_1)}}, \quad B_5 = \frac{k(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_{17}}, \quad C = \frac{k\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{A_{17}},$$

$$\varphi = \frac{k\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2A_{17}}(x - kt), \quad l^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)},$$

şeklindedir.

5.SONUÇ

Bu çalışmada C. S. Liu tarafından literatüre sunulmuş olan deneme denklem metodunun genişletilmiş bir hali olan GDDM ele alınmıştır. İlk olarak bu metodun genel yapısı verilmiş ve GDDM kullanılarak (2+1) Boyutlu Elektriksel İletim Hattı Denklemi, Dullin-Gottwald-Holm Dinamik Denklemi, Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine Denklemi ve Gergin Dalga Denkleminin tam çözümleri elde edilmiştir. Bu denklemlerde ilk olarak hareketli dalga dönüşümleri kullanılarak ele alınan denklemler lineer olmayan adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiştir. Elde edilen bu denklem Mathematica 12 programı kullanılarak bir cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüş ve bu cebirsel denklem sisteminin aynı program ile çözülmesi sonucunda söz konusu denklemlerin tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca ele alınan bu denklemlerin bulunan çözümlerinin belli değerleri için hem iki boyutlu hem de üç boyutlu grafikleri Mathematica 12 programı kullanılarak çizilmiştir. Böylece lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için kullanılan GDDM'nin kullanışlı ve kesin sonuç veren bir yöntem olduğu anlaşılır. Ayrıca GDDM'nin lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin rasyonel fonksiyon çözümleri, soliton çözümleri, Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri, hiperbolik fonksiyon çözümleri ve periyodik dalga çözümlerini bulmak için kullanılan etkili bir yöntem olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] Sevimli, E., Diferansiyel Denklemlerin Öğreniminde Yaşanan Zorluklar ve Alternatif Öğretim Yaklaşımları, Sakarya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 6(2), 154–171, 2016.
- [2] Wazwaz, A.-M., The Hirota's direct method and the tanh-coth method for multiplesoliton solutions of the Sawada–Kotera–Ito seventh-order equation, Applied Mathematics and Computation, 199, 133–138, 2008.
- [3] Pelap, F., Kamga, J., Fomethe, A., Kenfack, A., Faye, M., Wave dynamics in a modified quintic complex Ginzburg-Landau system, Phys. Lett. A 373, 1015-1018, 2009.
- [4] Pandir, Y., & Ekin, A., Dynamics of combined soliton solutions of unstable nonlinear Schrodinger equation with new version of the trial equation method, Chinese Journal of Physics, 67, 534-543, 2020.
- [5] Rizvi, ST., Ali K., Sardar A., et al. Symbolic computation and abundant travelling wave solutions to KdV-mKdV equation, Pramana 88(1), 1-6, 2017.
- [6] Irshad, A., Mohyud-Din, S.T., Tanh-Coth Method for Nonlinear Differential Equations, Studies in Nonlinear Sciences, 3(1), 24-48, 2012.
- [7] Liu, C.S., Trial equation method and its applications to non-linear evolution equations, Acta Physica Sinica-Chinese Edition, 54(6), 2505-2509, 2005.
- [8] Li, Y., Trial Equation Method for Solving the Improved Boussinesq Equation, Advances in Pure Mathematics, 04(02), 47-52, 2014.
- [9] Li, Y., Application of Trial Equation Method for Solving the Getmanou Equation, Advances in Pure Mathematics, 5(10), 1463-1473, 2014.
- [10] Bulut, H., Pandir, Y., Modified Trial Equation Method to the Nonlinear Fractional Sharma–Tasso–Olevers Equation, International Journal of Modeling and Optimization, 3(4), 353-357, 2013.
- [11] Bulut, H., Başkonuş. H.M., Pandir Y., The Modified Trial Equation Method for Fractional Wave Equation and Time Fractional Generalized Burgers Equation, Abstract and Applied Analysis, 2013(1), 1-8, 2013.
- [12] Odabaşı, M., Mısırlı, E., On the solutions of the nonlinear fractional differential equations via the modified trial equation method, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41(3), 904–911, 2018.

- [13] Tandoğan, Y.A., Bildik, N., Exact solutions of the time-fractional Fisher equation by using modified trial equation method, International Numerical Analysis Conference and Applied Mathematics, Yunanistan, 2016.
- [14] Liu, C. S., A new trial equation method and its applications, Communications in Theoretical Physics, 45(3), 395-397, 2006.
- [15] Pandır Y., Gürefe Y., Kadak U., Mısırlı E., Classification of Exact Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations with Generalized Evolution, Abstract and Applied Analysis, 1-16, 2012.
- [16] Gurefe, Y., Emine Mısırlı, Traveling Wave Solutions by Extended Trial Equation Method, AIP Conference Proceedings, 1558(1), 1931-1935, 2013.
- [17] Postolache, M., Gurefe, Y., Sonmezoğlu, A., Ekici, E., Mısırlı, E., Extended Trial Equation Method and Applications to Some Nonlinear Problems, U. P. B. Scientific Bulletin, 76(2), 3-12, 2014.
- [18] Ekici, M., Sonmezoğlu, A., Mirzazadeh, M. Z., Ullah, M. Z., Dispersive Optical Solitons With Schrödinger–Hirota Equation by Extended Trial Equation Method, Optik-International Journal for Light and Electron Optics, 136, 451-461, 2017.
- [19] Gurefe, Y., Mısırlı, E., Sonmezoğlu, A., Ekici, M., Extended trial equation method to generalized nonlinear partial differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 219(10), 5253-5260, 2013.
- [20] Pandir, Y., Gurefe, Y., Mısırlı, E., The Extended Trial Equation Method for Some Time Fractional Differential Equations, Discrete Dynamics in Nature and Society 2013(491359), 21-24, 2013.
- [21] Bulut, H., Pandir, Y., Tuluce Demiray S., Exact Solutions of Nonlinear Schrodinger's Equation with Dual Power - Law Nonlinearity by Extended Trial Equation Method, Waves in Random and Complex Media, 24(4), 439-451, 2014.
- [22] Tuluce Demiray, S., Pandir, Y., Bulut, H., New Solitary Wave Solutions of Maccari System, Ocean Engineering, 103(103), 153-159, 2015.
- [23] Tuluce Demiray, S., Pandir, Y., Bulut, H., New Soliton Solutions for Sasa-Satsuma Equation, Waves in Random and Complex Media, 25(3) , 417-428, 2015.

- [24] Tuluce Demiray, S., Pandir, Y., Bulut, H., All Exact Travelling Wave Solutions of Hirota Equation and Hirota-Maccari System, Optik, 127(4), 1848-1859, 2016.
- [25] Tuluce Demiray, S., Bulut, H., Some Exact Solutions of Generalized Zakharov System, Waves in Random and Complex Media, 25(1), 75-90, 2015.
- [26] Tuluce Demiray, S., and Bulut, H., New Exact Solutions of the New Hamiltonian Amplitude Equation and Fokas Lenells Equation, Entropy, 17(9), 6025-6043, 2015.
- [27] Tuluce Demiray, S., Bulut, H., New exact solutions for generalized Gardner equation, Kuwait J. Sci., 44(1), 1-8, 2017.
- [28] Tuluce Demiray, S., Bulut, H., New Exact Solutions of the System of Equations for the Ion Sound and Langmuir Waves by ETEM, Mathematical and Computational Applications, 21(11), 1-9, 2016.
- [29] Tuluce Demiray, S., Lineer ve Lineer Olmayan Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Elazığ, 120, 2014.
- [30] Aksoy, E., Lineer Olmayan Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Tam Çözüm Yöntemleri, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İstanbul, 136, 2015.
- [31] Yokuş, A., Bazı Özel Lineer Olmayan Diferansiyel denklemlerin Çözümlerinin Elde Edilmesi ve Bu Çözümlerin Karşılaştırılması, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Elazığ, 71, 2011.
- [32] Çınar, M., Çınar, M., Mathematica 3.0 ve 4.0 sürümü, Seçkin Yayıncılık, 2000.
- [33] Gülcü, A., Mathematica 5, Asil Yayın Dağıtım, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

1. **Adı Soyadı** : Merve DAVARCI YALÇIN

2. **Öğrenim Durumu** :

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Bitirme Yılı
Lisans	Matematik	Anadolu Üniversitesi	2015 - 2019
Yüksek Lisans	Matematik A.B.D.	Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi	2019 - 2021





OSMANİYE KORKUT ATA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

FORM
YL11

OSMANİYE KORKUT ATA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 09/11/2021

Tez Başlığı / Konusu: GENİŞLETİLMİŞ DENEME DENKLEM METODU İLE BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Özet ve Abstract, c) Giriş, d) Ana bölümler ve e) Sonuç, f) Kaynakça kısımlarından oluşan toplam **46** sayfalık kısmına ilişkin, 09/11/2021 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme tiplerinden biri uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı **% 18** 'dir.

Filtreleme Tip 1 (maksimum %30) ☒

- 1- Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç,
- 2- Kaynakça hariç,
- 3- Alıntılar dahil,
- 4- 5 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.

Filtreleme Tip 2 (maksimum %10) ☐

- 1- Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç,
- 2- Kaynakça hariç,
- 3- Alıntılar hariç,
- 4- 5 Kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.

Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Merve DAVARCI YALÇIN

Öğrenci No: 1911109102

Anabilim Dalı: Matematik

Programı:

Statüsü: ☒ Y.Lisans ☐ Doktora

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

RAPORU DÜZENLEYEN

(Unvan, Ad Soyad, İmza)

(Unvan, Ad Soyad, İmza)